$$f_X(x) = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\right) 1_{[-1,1]}(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

2. on pose $X = R\cos\theta$ et $Y = R\sin\theta$, on a donc déjà $g^{-1}(R,\theta) = (X,Y)$
   $f_{R,\theta}(R,\theta) = f_{X,Y} \circ g(R,\theta)|D_{g(R,\theta)}|1_{\mathbb{R}^+}(R)1_{]-\pi,\pi[}(\theta)$
   $|D_{g(R,\theta)}| = |R|$
   $f_{R,\theta}(R,\theta) = \frac{1}{\pi}|R|1_D(R\cos\theta, R\sin\theta)1_{\mathbb{R}^+}(R)1_{]-\pi,\pi[}(\theta)$
   on calcule les densités marginales :
   - $f_\theta = \int_0^1 \frac{R}{\pi} dR 1_{]-\pi,\pi[}(\theta) = \frac{1}{2\pi}1_{]-\pi,\pi[}$
   - $f_R = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R}{\pi} d\theta 1_{[0,1]}(R) = 2R1_{[0,1]}(R)$
3. on pose $Z = \frac{X}{X^2+Y^2}$
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \iint \frac{x}{x^2+y^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy \\ &= \iint \frac{R\cos\theta}{R^2} f_{R,\theta}(R,\theta)|R|d\theta dR \\ &= \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R}{\pi}\frac{R\cos\theta}{R^2}|R|d\theta dR = 0\end{aligned}$$

7.9 Loi de proba conditionnelle 1

Soit $f_{X,Y}(x,y) = \exp((-x/y)-y)/y1_{\mathbb{R}^+}(x)1_{\mathbb{R}^+}(y)$

1. calculer $f_{X|Y}(x|y)$
   $$\begin{aligned}f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int f_{X,Y}(x,y)dx} \\ &= \exp(-x/y)/y1_{\mathbb{R}^+}(x)1_{\mathbb{R}^+}(y)\end{aligned}$$
2. calculer $\mathbb{E}[X|Y=y]$
   $\mathbb{E}[X|Y=y] = \int x f_{X|Y}(x|y)dx = y1_{\mathbb{R}^+}(y)$
   $\Longrightarrow \mathbb{E}[X|Y] = Y$

7.10 Loi de proba conditionnelle 2

On a $f_{X|Y}(x|y)$ et $f_Y(y)$, on nous demande la loi de Y en $\{X = x\}$

$$\begin{aligned}f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int f_{X,Y}(x,y)dy} \\ &= \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\int f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy}\end{aligned}$$

7.11 Loi de proba conditionnelle 3

$X \sim P(\lambda), Y \sim P(\mu) \Rightarrow X+Y \sim P(\lambda+\mu)$

1. Calculer $\mathbb{E}[X|X+Y]$
   $$\begin{aligned}P(X=x|X+Y=z) &= \frac{P(X=x, X+Y=z)}{P(Z=z)} \\ &= \frac{P(X=x, Y=z-X)}{P(Z=z)} \\ &= \frac{P(X=x)P(Y=z-X)}{P(Z=z)}\end{aligned}$$
   $$= \sum_{x=0}^{z} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\frac{e^{-\mu}\lambda^{z-x}}{(z-x)!}\frac{(\lambda+\mu)^z z!}{e^{-(\lambda+\mu)}}$$
   $$\begin{aligned}&= \left[\sum_{x=0}^{z} x\frac{z!}{x!(z-x)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x\right]\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^z \\ &= \left(\sum_{x=0}^{z} xC_z^x u^{x-1}\right)u\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^z \; ou\; u = \frac{\lambda}{\mu} \\ &= z\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)^{z-1}\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^z \\ &= z\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)^z\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^z \\ &= \frac{\lambda z}{\lambda+\mu}\end{aligned}$$
   $\mathbb{E}[X|X+Y=z] = \sum_{x=0}^{z} xP(X=x|X+Y=z)$
   $\mathbb{E}[X|X+Y] = \frac{\lambda(X+Y)}{\lambda+\mu}$
2. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|X+Y]] = \mathbb{E}[X] = \lambda$ (formule des espérances totales)
   En effet : $\mathbb{E}\left(\frac{\lambda(X+Y)}{\lambda+\mu}\right) = \lambda\frac{\mathbb{E}z}{\lambda+\mu} = \lambda$

7.12 Exo de synthèse

Soient X et Y ind. de meme densité $f(x) = e^{-x}1_{[0,+\infty[}(x)$

1. Loi de $X+Y$?
   $$\begin{aligned}f_{X+Y}(t) &= \int f_X(t-u)f_Y(u)du \\ &= 1_{R^+}(t)\int_0^t e^{t-u}e^u du \\ &= te^{-t}1_{R^+}(t)\end{aligned}$$
2. Fonction de répartition G de X/Y, en déduire la densité g.
   $$\begin{aligned}P(X/Y \le t) &= \iint_{X/Y\le t} f_{X,Y}dxdy \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{yt} e^{-x}e^{-y}dxdy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-y} - e^{-y-yt}dy \\ &= \frac{t}{t+1}\end{aligned}$$
   on trouvé le domaine d'intégration en traçant la courbe $x = yt$, on a donc $G(t) = \frac{t}{t+1}1_{R^+}(t)$, on dérive pour obtenir g
   $g(t) = \frac{1_{R^+}(t)}{(t+1)^2}$
3. F.d.r de $X/Y, Y$, densité conjointe de $X/Y, Y$, retrouver g
   $$\begin{aligned}P(X/Y \le t, Y \le a) &= \iint_{(X/Y\le t, Y\le a)} f_{X,Y}dxdy \\ &= \int_0^a\int_0^{yt} e^{-x}e^{-y}dxdy \\ &= 1 - e^{-a} - \frac{1-e^{-a(t+1)}}{t+1}\end{aligned}$$
   on dérive pour obtenir la densité conjointe :
   $$\begin{aligned}f_{X/Y,Y}(t,a) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial a}F_{X/Y,Y}(t,a)\right) \\ &= 1_{R^+}(t)1_{R^+}(a)ae^{-a(t+1)}\end{aligned}$$
   on retrouve g :
   $g(t) = f_{X/Y}(t) = \int f_{X/Y,Y}(t,a)da$

1 Chapitre 1

1.1 Formule des probabilités totales

$P(A) = \sum_{n\in I} P(A|A_n)P(A_n)$

1.2 Formule de Bayes

$$P(A_n|A) = \frac{P(A|A_n)P(A_n)}{\sum_{i\in I} P(A|A_i)P(A_i)}$$
$$\left(P(A_n|A) = \frac{P(A\cap A_n)}{P(A)} = \frac{P(A|A_n)P(A_n)}{P(A)}\right)$$

2 chapitre 2

2.1 Lois usuelles des v.a.d

2.1.1 Loi binomiale

on répète n épreuves de Bernouilli : $X \sim B(n,p) \Leftrightarrow p_X(k) = P(X=k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

2.1.2 Loi de poisson

$X \sim P(\lambda) \Leftrightarrow P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$

2.1.3 Loi géométrique

$X \sim G(p) \Leftrightarrow P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

2.2 Espérance, variance et moments

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in E} xP(X=x)$ si $\sum_{x\in E}|x|P(X=x) < \infty$
- $\mathbb{E}[X^n] = \sum_{x\in E} x^nP(X=x)$ est le moment d'ordre n
- $Var(X) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]$
- $\mu_r = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^r\right]$ est le moment centré d'ordre r

2.2.1 Propriétés

- $\mathbb{E}[aX+bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[XY] = E[X]\mathbb{E}[Y]$ si X et Y sont indépendants
- $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$ est l'écart type
- $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$
- $Var(aX+b) = a^2Var(X)$
- $Var(X_1 + \ldots X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n)$ si X_i indépendants

2.2.2 Caractéristiques des lois usuelles

Lois	Espérance	Variance
Bernouilli $B(p)$	p	$p(1-p)$
Binomiale $B(n,p)$	np	$np(1-p)$
Poisson $P(\lambda)$	λ	λ
Géométrique $G(p)$	$1/p$	$(1-p)/p^2$

2.3 Fonctions génératrices

$g(u) = \mathbb{E}\left[u^X\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_nu^n$

- $\mathbb{E}[X] = g'(1); Var(X) = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2$
- $g(u)$ est infiniment dérivable sur $]-1,1[$ et
- $g^{(n)}(0) = p_nn!$
- $g_{X+Y}(u) = \mathbb{E}\left[u^{X+Y}\right] = \mathbb{E}\left[u^Xu^Y\right] = \mathbb{E}\left[u^X\right]\mathbb{E}\left[u^Y\right] = g_X(u)g_Y(u)$

Lois	Fonction génératrice
Bernouilli $B(p)$	$1-p+pu$
Binomiale $B(n,p)$	$(1-p+pu)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$\exp(-\lambda+\lambda u)$
Géométrique $G(p)$	$(pu)/(1-(1-p)u)$

3 Chapitre 3

3.1 Espérance, variance, médiane

$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \; si \; \int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx < +\infty$
variance : idem v.a.d (μ_2)

On appelle médiane de la v.a.r X tout réel M qui satisfait : $P(X \ge M) \ge \frac{1}{2} \; et \; P(X \le M) \ge \frac{1}{2}$

- $\mathbb{E}[aX+bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$
- $Var(aX+b) = a^2Var(X)$
- $Var(X_1 + \ldots X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n)$ si X_i indépendants

3.2 Lois usuelles des v.a.r

3.2.1 Loi uniforme

$f_X(x) = \frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(x)$

$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \mathbb{E}[X^2] = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \; et \; Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$

3.2.2 Loi normal ou de Gauss

$X \sim N(0,1)$ admet une densité f définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

Soit Y une v.a.r telle que $Y = \sigma X + \mu (\mu \in \mathbb{R} \; et \; \sigma \in]0,+\infty])$ alors :

$$\mathbb{E}[Y] = \sigma\mathbb{E}[X] + \mu = \mu \; et \; Var(Y) = \sigma^2Var(X) = \sigma^2$$

De plus :

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P\left(X \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F_X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

donc :

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Toutes v.a.r Y admettant la densité f_Y est dite normale de moyenne μ et de variance σ^2 ; on note alors $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$. Réciproquement si $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$ alors $X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Si $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ et $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ sont indépendantes alors $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

3.3 Fonctions génératrices des moments

$M_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)] = \int_R \exp(tx)f_X(x)dx$

- $M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$
  Si M_X est définie sur $[-a,a]$:
- X possède des moments finis de tous ordres
- $M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\mathbb{E}[X^k]$

Lois	f.g.m
Uniforme $U(a,b)$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Exponentielle $E(\lambda)$	$\lambda/(\lambda-t)$
Normale $N(\mu,\sigma^2)$	$\exp\left((t^2\sigma^2)/2\right)+\mu t$
Gamma $\gamma(\alpha,\lambda)$	$(\lambda/(\lambda-t))^\alpha$

3.4 Sommes de 2 v.a.r

$f_{X+Y}(t) = \int_R f_X(t-u) f_Y(u) du$
$F_{X+Y}(t) = \int_R F_X(t-u) f_Y(u) du$
$M_{X_1+X_2 \ldots + X_n}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t)$

3.5 Inégalités

3.5.1 inégalité de Bienaymé-Čebicčev

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

3.5.2 inégalité de Cauchy-schwartz

si les v.a.r X et Y possèdent des moments d'ordre 2 alors : $(\mathbb{E}[XY])^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$

3.5.3 inégalité de Jensen

$\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}[(X)])$ si φ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$

4 Convergence stochastique

4.1 Convergence presque-sure

$P(\omega \in \Omega; \lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$
Loi forte des grands nombres : On suppose que les v.a.r sont i.i.d. et qu'elles admettent une moyenne $\mu = \mathbb{E}(X)$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$ Alors $S_n \xrightarrow{p.s.} \mu$ quand $n \to +\infty$

4.2 Convergence en probabilité

$\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$
Loi faible des grands nombres : $S_n \xrightarrow{P} \mu$

4.3 Convergence en loi

$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim_{n \to +\infty} P(X_n \leq x) = F(x)$

4.3.1 Théorème de la limite centrale

$X_1, X_2 \ldots$ i.i.d. de moyenne μ et de variance σ^2, alors :

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{Var(Sn)}} = \sqrt{n}\left(\frac{S_n - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

où X suit une loi normale centrée réduite.

4.4 Fonction caractéristique

Soit X une v.a.r absolument continue de densité F_X, alors $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\exp(itX)) = \int_R \exp(itx) f_X(x) dx$
- si $Y = aX + b$, alors $\varphi_Y(t) = \exp(itb)\varphi_X(at)$
- $\varphi_X(0) = 1$
- $|\varphi_X(t)| \leq 1$
- $\varphi_X(t)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

Lois	Fct caractéristiques
Bernoulli $B(p)$	$pe^{it} + (1-p)$
Binomiale $B(n,p)$	$(pe^{it} + (1-p))^n$
Poisson $P(\lambda)$	$\exp(-\lambda(1 - \exp it))$
Uniforme sur $[0,1]$	$(1 - \exp it)/it$
Normale $N(\mu, \sigma^2)$	$\exp(it\mu - \sigma^2 t^2/2)$
Exponentielle $E(\lambda)$	$\lambda/(\lambda - it)$

4.5 Slutsky

Soient $(X_n), (Y_n), (Z_n)$ tel que $X_n \xrightarrow{P} x, Y_n \xrightarrow{P} y$ et $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$, alors $X_n Z_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} xZ + y$

5 Variables aléatoires vectorielles

5.1 Lois marginales

$P_X(x) = P(X = x) = \sum_{Y \in E_Y} p_{X,Y}(x,y)$

5.2 Espérance

$\mathbb{E}[f(X,Y)] = \sum f(x,y) p_{X,Y}(x,y)$

5.3 Covariance

$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$
Le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$ défini par $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$
- $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- $Cov(X,X) = Var(X)$
- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
- $Cov(aX + bY, Z) = aCov(X,Z) + bCov(Y,Z)$
- $Cov(X,Y) = 0$ si X et Y indépendants
- $|\rho_{X,Y}| \leq 1$
- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$

5.4 Densité marginale

pour calculer $f_i(x)$ on fixe x et on intègre $f_X(x_1 \ldots x_n)$ par rapport aux autres variables. De plus $F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(y) dy$

5.5 Transfo d'un v.a

Soit $Y = g \circ X \Leftrightarrow Y(w) = g(X_1(w) \ldots X_n(w))$. On intègre sur le nouveaux domaine pour trouver $f_Y(y)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int g(x_i) f(x_i) dx_i$

5.6 Transfo vectorielle

$Y = g(X)$ vecteur aléatoire à valeur dans F, on a
$f_Y(y_i) = f_X \circ g^{-1}(y_i) |DJ_{g^{-1}(y_i)}| 1_F(y_i)$

5.7 Loi de proba conditionnelle

- cas discret : $\mathbb{E}[Y|X = x] = \sum_{Y \in E_Y} yP(Y = y|X = x) = \sum_{Y \in E_Y} yp_x(y)$
- cas continu

$$F_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{y} f(x,v) dv$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_R f(x,v) dv}$$

où $f(x,y)$ est la densité conjointe du couple

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \int_R y f_{Y|X}(y|x) dy$$

$$Var[Y|X = x] = \int_R (y - \mathbb{E}[Y|X = x])^2 f_{Y|X}(y|x) dy$$
$$= \int_R y^2 f_{Y|X}(y|x) dy - (\mathbb{E}[Y|X = x])^2$$

5.8 Complément

- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$ espérance totale
- $\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Y]$ si X et Y sont ind.
- Lemme de Wald : $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]$ où $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ et N v.a.d et $(X_1, X_2 \ldots X_n)$ iid

6 trucs utiles

$\sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^n = (a+b)^n$
$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$
$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + \ldots x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$
$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{i=1}^n i^2 = 1 + 4 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^n i^3 = 1 + 8 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

7 exos type

7.1 appli limite centrale 1

$X_i, iid, \sim B(p), X = \sum X_i \sim B(n,p)$

$$\begin{aligned}
P(X \leq x) &= P(\textstyle\sum X_i \leq x) \\
&= P\left(\frac{\sum X_i}{n} \leq \frac{x}{n}\right) \\
&= P\left(\frac{\frac{\sum X_i}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{\sum X_i}{n}\right)}{\sqrt{Var\left(\frac{\sum X_i}{n}\right)}} \leq \frac{\frac{x}{n} - p}{\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum Var X_i}}\right) \\
&= P\left(\frac{Sn - \mathbb{E}\,Sn}{\sqrt{VarSn}} \leq \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&\simeq \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)
\end{aligned}$$

7.2 appli limite centrale 2

$X_i \sim U[-0,05; 0.05], \mathbb{E}X_i = 0, VarX_i = \frac{0.1^2}{12} = \frac{5}{6000}$

$$\begin{aligned}
P(|\textstyle\sum X_i| \leq 2) &= P(-2 \leq \textstyle\sum X_i \leq 2) \\
&= P\left(-\frac{2}{\sqrt{5/6}} \leq \frac{\sum X_i}{\sqrt{5/6}} \leq \frac{2}{\sqrt{5/6}}\right) \\
&\simeq 2\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{5/6}}\right)
\end{aligned}$$

7.3 Loi de poisson

$X_i \sim B(p), \sum X_i \sim B(n,p)$, si $p \ll np \ll n$ alors on approxime $\sum X_i$ par une loi de poisson de paramètre $\lambda = \mathbb{E}\sum X_i$,
exemple : $p = 0,001, n = 5000$, on a $\lambda = \mathbb{E}\sum X_i = 5$, on a donc :

$$\begin{aligned}
P(\textstyle\sum X_i \leq x) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \\
P(\textstyle\sum X_i \leq 2) &= e^{-5} + 5e^{-5} + \frac{5^2}{2!}e^{-5} = 0,125
\end{aligned}$$

7.4 Loi de X/Y

Soit X et Y indépendants de meme loi $U(0,1)$, loi de X/Y ?
$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = 1_{[0,1]}(x) 1_{[0,1]}(y)$
$P(X/Y \leq t) = \iint 1_{\{(x,y), x/y \leq t\}}$

On doit trouver le domaine d'integration, on trace la courbe $x = yt$ et on intègre par morceau :
- $t < 1$
  $P(X/Y \leq t) = \int_0^1 \int_0^{yt} dxdy = \frac{1}{2}$
- $t > 1$
  $P(X/Y \leq t) = \int_0^{\frac{1}{t}} \int_0^{yt} dxdy + \int_{\frac{1}{t}}^1 \int_0^{yt} dxdy = 1 - \frac{1}{2t}$

7.5 Variance, covariance

Soient Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 ind. $\sim B(p)$, on pose $X_i = Y_i Y_{i+1}$

1. Loi de X_i
$$\begin{aligned}
P(X_i = 1) &= P(Y_i Y_{i+1} = 1) \\
&= P(Y_i = 1; Y_{i+1} = 1) \\
&= p^2
\end{aligned}$$
donc $X_i \sim B(p^2) \Longrightarrow \mathbb{E}[X_i] = p^2, Var(X_i) = p^2 - p^4$
2. $\mathbb{E}[X_i X_{i+1}], Cov(X_i X_{i+1})$?
$\mathbb{E}[X_i X_{i+1}] = \mathbb{E}[Y_i Y_{i+1} Y_{i+1} Y_{i+2}] = p^4$
$Cov(X_i X_{i+1}) = \mathbb{E}[X_i X_{i+1}] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_{i+1}] = 0$
3. $Cov(X_1, X_3) = 0$ car indépendants
4. $Var(X_1 + X_2 + X_3) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) + 2Cov(X_1, X_2) + 2Cov(X_1, X_3) + 2Cov(X_2, X_3) = 3(p^2 - p^4)$

7.6 Min – Max

X, Y ind $\sim U(0,1), U = min(X,Y), V = max(X,Y)$
- $F_V(x) = P(V \leq x) = P(max(X,Y) \leq x) = P(X \leq x, Y \leq x) = F_X(x)F_Y(x) = F_X^2(x)$
- $F_U(x) = 1 - P(min(X,Y) \geq x) = 1 - P(X \geq x)P(Y \geq x) = 1 - (1 - P(X \leq x))(1 - P(Y \leq x)) = 1 - (1 - F_X(x))^2$
- $F_{U,V} = P(U \leq u, V \leq v)$
  $F_{U,V} + P(U \geq u, V \leq v) = P(((U \leq u) \cup (U > u)) \cap (V \leq v)) = P(V \leq v) = F_V(v)$
  $F_{U,V} = F_V(v) - P(U \geq u, V \leq v) = P(X \leq v, Y \leq u - (v-u)^2 = v^2 - (v-u)^2$
  $F_U(u) = \lim_{v \to +\infty} F_{U,V}(u,v)$

7.7 Loi des proba totales

$X \sim N(0,1), Y = \varepsilon X$ où ε est équidistribué sur $\{-1; 1\}$, $F_Y(y) = F_X(y)$?

$$\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= P(\varepsilon X \leq y) \\
&= P(\varepsilon X \leq y | \varepsilon = -1)P(\varepsilon = -1) \\
&\quad + P(\varepsilon X \leq y | \varepsilon = 1)P(\varepsilon = 1) \\
&= \tfrac{1}{2}P(-X \leq y | \varepsilon = -1) + \tfrac{1}{2}P(X \leq y | \varepsilon = 1) \\
&= \tfrac{1}{2}[P(-X \leq y) + P(X \leq y)]
\end{aligned}$$

$= \frac{1}{2}(1 - F_X(-y) + F_X(y)) = F_X(y)$
$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X\varepsilon X] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$

$$\begin{aligned}
P(X + Y = 0) &= P(X + \varepsilon X = 0) = P(X(1+\varepsilon) = 0) \\
&= P((X = 0) \cup (\varepsilon = -1)) \\
&= P(X = 0) + P(\varepsilon = -1) \\
&\quad - P(X = 0, \varepsilon = -1) = 1/2
\end{aligned}$$

7.8 Transfo vectorielle

(X,Y) vecteur aléatoire de loi uniforme sur D le disque unité

1. $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} 1_D(x,y)$