1 Séries numériques

1.1 Convergence

1.1.1 Condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

1.1.2 Critère de convergence de Cauchy

La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ tel\ que\ \forall p > q > \eta,\ on\ ait\ |\sum_{n=q+1}^{p} u_n| < \varepsilon$

1.1.3 Convergence absolue

La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Toute série absolument convergente est convergente.

1.2 Séries à termes positifs

1.2.1 CNS de convergence des séries à termes positifs

La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la somme $S_n = \sum_1^n u_k$ est majorée

1.2.2 Comparaison de 2 séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles telles que $u_n \leq v_n$. Alors on a :

– si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

– si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge. (contraposée)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques à termes positifs tels que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \alpha \neq 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergent ou divergent en même temps)

1.2.3 Règle de Cauchy

Supposons que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ existe et est égale à l, alors :

1. si l<1, la série $\sum u_n$ converge
2. si l>1, la série $\sum u_n$ diverge

1.2.4 Règle de d'Alembert

Supposons que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n + 1}{u_n}$ existe et est égale à l :

1. si l<1, la série $\sum u_n$ converge
2. si l>1, la série $\sum u_n$ diverge

1.2.5 Comparaison avec une intégrale

Soit f une fonction réelle de la variable réelle, positive et décroissante. La série $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ l'est aussi.

1.2.6 Corollaire

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, dite de Riemann, est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $0 < \alpha \leq 1$

1.3 Séries à terme quelconque

1.3.1 Théorème d'Abel

On considère la série $\sum a_n u_n$, a_n étant une suite de nombre réels et u_n une suite de nombre réels ou complexes. Si

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. la série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ converge
3. il existe une constante M telle que $|u_n + \ldots + u_m| < M, \forall n, m$

alors la série $\sum a_n u_n$ converge

1.3.2 Convergence d'une série alternée

Si le terme général $v_n \geq 0$ est décroissant et tend vers 0 à l'infini, alors la série alternée $\sum (-1)^n v_n$ est convergente

1.4 Série à termes complexes

Pour que la série à terme complexe $z_n = a_n + ib_n$ soit convergente, il faut et il suffit que les séries réelles de termes généraux a_n et b_n le soient. Dans ce cas,

$s = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Toute série à terme complexe absolument convergente est convergente.

2 Séries de fonctions

2.1 Suites de fonctions

Convergence simple : $\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Convergence uniforme : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in (a, b)$

Toute suite qui converge uniformement vers f sur (a, b) converge aussi simplement vers f sur (a, b), mais la réciproque est fausse

2.2 Séries de fonctions

2.2.1 Critère de convergence de Cauchy

Convergence simple : $\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 :\ \forall p > q > n_0,\ |f_{q+1}(x) + \ldots + f_p(x)| < \varepsilon$

Convergence uniforme : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 :\ \forall p > q > n_0,\ |f_{q+1}(x) + \ldots + f_p(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in (a, b)$

2.2.2 Convergence normale

$\sum v_n$ une série numérique à termes positifs convergente : Si $\forall n \geq n_0,\ |f_n(x)| < v_n,\ \forall x \in (a, b)$, alors $\sum f_n$ est absolument et uniformément convergente (= normalement convergente)

2.3 Propriétés

Si les f_n sont continues sur (a,b) et que $\sum f_n$ est uniformément convergente vers f sur (a,b), alors

– sa somme f est aussi continue sur (a,b)

– $\int_a^b f_n(x)dx$ converge et a pour somme $\int_a^b f(x)dx$

Si

1. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction f,

2. les fonctions f_n sont dérivables sur $[a,b]$ et de dérivées f'_n continues sur $[a,b]$,
3. la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a,b]$

alors

1. la fonction f est dérivable sur $[a,b]$
2. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$

3 Séries entières

Définition 1 *On appelle* ***série entière*** *une série de fonctions de terme général $f_n(z) = a_n z^n$ où les a_n sont réels ou complexes et z est une variable réel ou complexe.*

3.1 Rayon de convergence

Remarque 1 *Désormais, dans la règle de* CAUCHY *pour les séries numériques à terme positifs, nous remplacerons l'étude de la limite de la racine nième du terme général par celle de sa limite supérieure.*

Nous considérons donc la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ (resp $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$).

1. Si cette suite est bornée, alors elle admet une limite supérieur, qu'on notera L.
   - Si $L = 0$ la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. On dira dans ce cas que **le rayon de convergence de la série est infini**.
   - Si $L \neq 0$, la série $\sum a_n z^n$ converge pour $|z| < 1/L$ et diverge pour $|z| > 1/L$. On dira dans ce cas que **le rayon de convergence de la série est** $R = 1/L$
2. Si la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'est pas bornée, alors le seul point où la série est convergente est $z = 0$. Pour tout autre point $z \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|z| \neq 0$ et donc la série $\sum a_n z^n$ diverge. On dira dans ce cas que **le rayon de convergence de la série est** $R = 0$.

3.2 Propriétés

3.2.1 Somme de deux séries

Lemme 1 *S'il existe un point $z_0 \neq 0$ tel que la série $\sum a_n z_0^n$ soit convergente, alors la série entière $\sum a_n z^n$*

1. *converge absolument dans le disque ouvert $\{z : |z| < |z_0|\}$,*
2. *convergence uniformément dans tout disque fermé $\{z : |z| \leq \rho < |z_0|\}$.*

Théorème 1 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R et R'.*

1. *Si $R \neq R'$, la série $\sum(a_n + b_n)z^n$ a pour rayon de convergence $R'' = \min(R, R')$.*
2. *Si $R = R'$, la série $\sum(a_n + b_n)z^n$ a pour rayon de convergence $R'' \geq R$.*

3.2.2 Continuité

Théorème 2 *La somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $]-R, R[$, R désignant son rayon de convergence.*

3.2.3 Integration d'une série entière

Théorème 3 *Soient $R > 0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sa somme.*

Alors la série $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a le même rayon de convergence et sa somme vérifie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

3.2.4 Dérivation d'une série entière

Théorème 4 *Soient $R > 0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sa somme.*

Alors la série $\sum n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergence et sa somme vérifie $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+1} = f'(x)$.

3.2.5 Développement d'une fonction en série entière

- Problème direct : on se donne une série entière et on étudie sa convergence et les propriétés de sa limite
- Problème indirect : on se donne une fonction et on cherche à savoir si elle est la somme d'une série entière.

Théorème 5 ***Conditions nécessaires :*** *si une fonction f de la variable réelle coïncide avec une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence R, alors*

1. *Elle est C^∞ pour $|x| < R$,*
2. *$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

La série $\sum \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ est dite série de Taylor de la fonction f.

Théorème 6 ***Conditions suffisantes :*** *si pour $|x| < R$ une fonction f et toutes ses dérivées $f^{(n)}$ sont bornées par une constante C indépendante de x et de n $|f^{(n)}| < C$, alors $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)} x^n$*

Théorème 7 ***Principe des zéros isolés :*** *soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit f sa somme.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R$$

Si les coefficients a_n ne sont pas tous nuls, il existe un nombre $0 < r < R$ tel que $0 < |z| < r \Rightarrow f(z) \neq 0$

Conséquences :
- Soient $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sa somme. Si $f(z) = 0, |z| < R$ alors $a_n = 0 \forall n$.
- Soient $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ deux séries entières ayant le même rayon de convergence R. Soient f, g : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, |z| < R$. Si $f(z) = g(z)$ pour **tout** $|z| < R$, alors $a_n = b_n$.

4 Séries de Fourier

4.1 Séries trigonométriques

4.1.1 Fonction $\mathbf{e}^z$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

1. $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$,

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{ix} = \cos(x) + i\,\sin(x)$,
3. $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad e^{z+2ik\pi} = e^z$.

4.1.2 Séries trigonométriques

On appelle série trigonométrique une série de fonctions $\sum u_n(x)$ où :

$$\begin{cases} u_0(x) = \frac{a_0}{2} \\ u_n(x) = a_n\,\cos(n\omega x) + b_n\,\sin(n\omega x) \end{cases}$$

avec $a_n, b_n, \omega \in \mathbb{R}$

4.1.3 Convergence d'une série trigonométrique

Convergence uniforme : Si les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum u_n(x)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Convergence simple : Si les suites numériques a_n et b_n sont décroissantes et si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, alors la série trigonométrique $\sum u_n(x)$ converge simplement en tout point $x \neq 2k\pi$

4.1.4 Propriétés de la somme d'une série trigonométrique

1. Si la série trigonométrique $\sum u_n(x)$ converge en x_0 vers $S(x_0)$, alors elle converge en $x_0 + \frac{2\pi}{\omega}$ et $S(x_0 + \frac{2\pi}{\omega}) = S(x_0)$.
2. Si la série trigonométrique $\sum u_n(x)$ converge uniformément sur $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ vers S, alors
   (a) $a_p = \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} S(x)\,\cos(n\omega x)\,\mathrm{d}x,$
   (b) $b_p = \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} S(x)\,\sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x.$

4.1.5 Représentation complexe

Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a :

1. $\lambda = \dfrac{\omega}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} S(x)\,e^{-ik\omega x}\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}$
2. $\lambda = \dfrac{\omega}{2\pi}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} S(x)\,e^{-ik\omega x}\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}$

4.2 Représentation d'une fonction par une série trigonométrique

4.2.1 Coefficients de Fourier

Soit une fonction intégrable, périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

1. Les quantités : $a_n = \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\,\cos(n\omega x)\,\mathrm{d}x,$
   $b_n = \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\,\sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x.$
   ou encore $\lambda = \dfrac{\omega}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\,e^{-ik\omega x}\,\mathrm{d}x$
   sont dites coefficients de Fourier de f.
2. La série trigonométrique :
   $\dfrac{a_0}{2} + \sum a_n\,\cos(n\omega x) + b_n\,\sin(n\omega x)$, ou encore
   $\sum \lambda_k e^{ik\omega x}$ est dite série de Fourier de f.

4.2.2 Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction de la variable réelle.

1. On dit qu'elle a une discontinuité de première espèce en x si elle admet en ce point une limite à droite $f(x+0)$ et une limite à gauche $f(x-0)$.
2. On dit qu'elle admet en y une dérivée à droite (resp. à gauche) si la limite suivante existe et est finie : $\lim_{h>0\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\quad (resp.\ \lim_{h<0\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h})$

Soit f une fonction réelle de la variable réelle, périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, satisfaisant les conditions suivantes :

1. Les discontinuités de f dans l'intervalle d'une période sont de première espèce et en nombre fini.
2. La fonction f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier de f est convergente et :

$$\frac{1}{2}f(x+0) + f(x-0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\cos(n\omega x) + b_n\,\sin(n\omega x)$$

ou encore : $\dfrac{1}{2}f(x+0) + f(x-0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k e^{ik\omega x}.$

4.2.3 Lemmes

- Soit une fonction intégrable bornée sur sur $[a, b]$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b f(x)\,\sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\dfrac{\omega}{2\pi}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\omega(x-t))}{\sin(\frac{\omega}{2}(x-t))}\,\mathrm{d}t = 1$

4.2.4 Inégalité de Bessel

- Soit f continue sur $[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$, et a_n, b_n ses coefficients de Fourier. Soient α_n, β_n deux suites réelles. On pose :
  $F_n(x) = \dfrac{\alpha_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k\,\cos(k\omega x) + \beta_k\,\sin(k\omega x))$
  et on considère : $I(\alpha_n, \beta_n) = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} |f(x) - F_n(x)|^2\,\mathrm{d}x.$
  Alors : $I(a_n, b_n) \leq I(\alpha_n, \beta_n)$
- Soient a_n, b_n les coefficients de Fourier de f. Alors : $\frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

4.2.5 Théorème de Parseval

Soient a_n, b_n les coefficients de Fourier d'une fonction continue f. Alors $\frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

5 Fonctions holomorphes

5.1 Fonctions de la variable complexe

On pose :

- $\cos(z) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!}$
- $\sin(z) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}$
- $\cosh(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p}}{(2p)!}$
- $\sinh(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}$
- Si on pose $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \rho > 0$ et $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$, on appelle logarithme complexe la fonction $\log_\alpha(z) = \ln(\rho) + i\theta$. En général, on prend $\alpha = -\pi$
- Mêmes conditions : la fonction puissance est $z_\alpha^m = e^{m\log_\alpha(z)}$

5.2 Limites et continuité

On considère $z = x + iy$:

$$\begin{array}{rcl} f : z & \longmapsto & f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) \\ \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

5.2.1 Limites

Définition 2 *On dit que* $\lim_{z\to z_0} f(z) = L = A + iB$ *si on a :* $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 : |z - z_0| < \alpha \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon$

Proposition 1
$L = \lim_{z\to z_0} f(z) \Leftrightarrow A = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} P(x,y)$ *et*
$B = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} Q(x,y)$

5.2.2 Continuité

f est continue en $z_0 \Leftrightarrow L = f(z_0)$

Proposition 2 *$f(z)$ est continue en $z_0 \Leftrightarrow$ P et Q le sont en (x_0, y_0)*

5.2.3 Dérivabilité

Proposition 3 *Pour que $f(z)$ admette une dérivée $f'(z_0)$, il faut et il suffit que l'on ait : $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)(f'(z_0) + \epsilon(z))$ avec $\lim_{z\to z_0} \epsilon(z) = 0$*

Définition 3 (Conditions de Cauchy)
$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$ *et* $\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$.

- **Si** f est dérivable **alors** P et Q vérifient les conditions de Cauchy.
- **Si** f vérifie les conditions de Cauchy et que les dérivées partielles de P et Q sont continues, **alors** f est dérivable.
- $f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$

5.3 Fonctions holomorphes

Définition 4 *Une fonction est **holomorphe** dans un domaine D si elle est dérivable en tout point de D.*

Théorème 8

1. *La somme d'une série entière est holomorphe à l'intérieur de son disque de convergence et $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{(n-1)}$*
2. *Les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ sont holomorphes dans $\mathbb{C}$ et leurs dérivées sont respectivement e^z, $\cos z$, $-\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$*
3. *$\log z$ est holomorphe dans $\mathbb{C} - (\mathbb{R}^-, 0)$ et $log'(z) = \frac{1}{z}$*

6 Pôles et résidus

6.1 Intégrale d'une fonction complexe

Définition 5 *On appelle intégrale de $f(z)$ sur l'arc de courbe C, le nombre complexe donné par deux intégrales curvilignes réelles :*
$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (P\,\mathrm{d}x - Q\,\mathrm{d}y) + i\int_C (Q\,\mathrm{d}x + P\,\mathrm{d}y)$
avec : $\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\,\mathrm{d}x$

Proposition 4 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t$

6.2 Théorème de Cauchy

6.2.1 Courbe fermée simple et domaine simplement connexe

Définition 6 *Nous dirons que le chemin (ou arc) est une **courbe fermée simple** s'il existe un intervalle $[a,b]$ et une application m tels que :*
- *$m : [a,b] \longmapsto C$ est continûment différentiable ;*
- *$m : [a,b[\longmapsto C$ est injective ;*
- *$m(a) = m(b)$.*

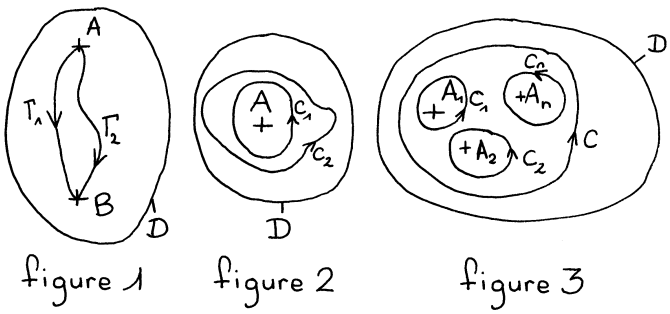
Définition 7 *Nous dirons qu'un domaine est simplement connexe si, pour tout courbe fermée simple C située dans D, l'intérieur de C est tout entier dans D.*

Théorème 9 (Cauchy) *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D et C une courbe fermée simple située dans D ainsi que son intérieur. Alors $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$*

6.2.2 Conséquences du théorème de Cauchy

Théorème 10

1. *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe. Soient A, B deux points de D et Γ_1, Γ_2 deux chemins quelconques joignant A à B, tels que la courbe $C = A\Gamma_1 B\Gamma_2 A$ forme une courbe fermée simple. Alors $\int_{A\Gamma_1 B} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{A\Gamma_2 B} f(z)\,\mathrm{d}z$ (figure 1).*
2. *Soient D un domaine, $A \in D$, f une fonction holomorphe dans $D\backslash\{A\}$, C_1, C_2 deux courbes fermées simples de D dont l'interieur contient A et est situé dans D. Alors $\int_{C_1^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2^+} f(z)\,\mathrm{d}z$. L'intégrale le long de C_i^+ signifie qu'elle est prise le long de C_i dans le sens direct (figure 2).*
3. *Soit D un domaine simplement connexe, $A_1, \ldots, A_n$ n points de D, f une fonction holomorphe dans $D\backslash\{A_i\}$, C une courbe fermée simple de D dont l'intérieur est contenu dans D et contient tous les points A_i, C_i une courbe fermée simple située dans l'interieur de C entourant le point A_i et laissant les autres points $(A_j, i \neq j)$ à son extérieur (voir figure 3). Alors*
$\int_{C^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1^+} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n^+} f(z)\,\mathrm{d}z$.



6.2.3 Formule intégrale de Cauchy

Théorème 11 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D contenant une courbe simple fermée C dont l'intérieur est situé dans D. Soit $a \in D$. Alors*
$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C^+} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$

Corollaire 1 *Une fonction holomorphe dans un domaine D admet des dérivées successives holomorphes dans D. La dérivée n^{ieme} de f au point $z \in D$ est donnée par :*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{C^+} \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}} du$$

où C est la circonférence d'un disque de centre z contenu dans D

6.3 Théorème des résidus

6.3.1 Développement en série entière de $z - a$

Théorème 12 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D, $A \in D$, d'affixe a, et $D(a, r)$ un disque ouvert de centre a et de rayon r. $\forall z \in D(a, r)$ de circonférence C :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - a)^n$$

avec

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{f(u)}{(u - a)^{n+1}} du$$

6.3.2 Zéros d'une fonction holomorphe

Définition 8 *Soit $f(z) = (z - a)^p k(z)$, alors a est un zéro de f.*

Théorème 13 *Tout zéro d'une fonction holomorphe f non identiquement nulle est isolé*

6.3.3 Pôle d'ordre p d'une fonction holomorphe

Définition 9 *Soit g une fonction holomorphe dans un disque $D(a, \rho)$ de centre a et de rayon ρ. On dit que a est un pôle d'ordre p de g s'il existe une fonction holomorphe h, $h(a) \neq 0$ telle que*

$$g(z) = \frac{h(z)}{(z - a)^p}, \quad \forall z \in D(a, \rho), z \neq 0$$

6.3.4 Résidu d'un pôle

Définition 10

- *La partie $P_a = \frac{B_0}{(z-a)^p} + \frac{B_1}{(z-a)^{p-1}} + \cdots + \frac{B_{p-1}}{(z-a)}$ est dite **partie principale** relative au pôle a d'ordre p.*
- *Le cœfficient B_{p-1} de l'élément $\frac{1}{z-a}$, noté R_a est dit **résidu** relatif à a.*

6.3.5 Forme intégrale du résidu

Théorème 14

$$R_a = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} f(z) dz$$

6.3.6 Théorème des résidus

Théorème 15 *Soit D un domaine de $A_k \in D$ d'affixe a_k, $k = 1, \ldots, n$. Soit g une fonction holomorphe dans $D \backslash \{\cup A_k\}$, a_k les pôles de g d'ordre p_k et R_{a_k} les résidus de g relatif à a_k. Alors*

$$\int_{C^+} f(z) dz = 2i\pi (R_{a_1} + \cdots + R_{a_n})$$

7 Quelques Compléments

Définition 11 *Une fonction f de la variable complexe est dite analytique au point $z_0 \in \mathbb{C}$ s'il existe un disque ouvert D (z_0, r) et une série entière $\sum a_n (z - z_0)^n$, convergente dans D telle que $\forall z \in D, f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n$*

- *D'après le principe des zéros isolés, si une telle série existe, elle est unique.*
- *f admet en tout point de D des dérivées de tout ordre :*

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n}$$

$$f^{(n)}(z_0) = (n!) a_n$$

7.1 Principe du prolongement analytique

Proposition 5 *Si deux fonctions f et g sont analytiques dans un domaine D. Si l'on a $f = g$ en tout point d'un ouvert $\theta \subset D$, alors $f = g$ en tout point de D.*

7.2 Principe du maximum

Proposition 6 *Soit f une fonction analytique dans un domaine D. Si $|f(z)|$ atteint son maximum en un point $z_0 \in D$, alors $f(z) = K$ où K est une constante, $\forall z \in D$.*

Théorème 16 (Lieuville) *Soit f une fonction analytique dans tout $\mathbb{C}$. Si f est bornée alors elle est constante.*

Théorème 17 (d'Alembert) *Tout polynôme $P(z)$ de degré n admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$.*