2. les fonctions f_n sont dérivables sur $[a,b]$ et de dérivées f_n' continues sur $[a,b]$,
3. la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$

alors

1. la fonction f est dérivable sur $[a,b]$
2. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

3 Séries entières

Définition 1 *On appelle* ***série entière*** *une série de fonctions de terme général $f_n(z) = a_n z^n$ où les a_n sont réels ou complexes et z est une variable réel ou complexe.*

3.1 Rayon de convergence

Remarque 1 *Désormais, dans la règle de* CAUCHY *pour les séries numériques à terme positifs, nous remplacerons l'étude de la limite de la racine nième du terme général par celle de sa limite supérieure.*

Nous considérons donc la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ (resp $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$).

1. Si cette suite est bornée, alors elle admet une limite supérieur, qu'on notera L.
   - Si $L = 0$ la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. On dira dans ce cas que **le rayon de convergence de la série est infini.**
   - Si $L \neq 0$, la série $\sum a_n z^n$ converge pour $|z| < 1/L$ et diverge pour $|z| > 1/L$. On dira dans ce cas que **le rayon de convergence de la série est** $R = 1/L$
2. Si la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'est pas bornée, alors le seul point où la série est convergente est $z = 0$. Pour tout autre point $z \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|z| \neq 0$ et donc la série $\sum a_n z^n$ diverge. On dira dans ce cas que **le rayon de convergence de la série est** $R = 0$.

3.2 Propriétés

3.2.1 Somme de deux séries

Lemme 1 *S'il existe un point $z_0 \neq 0$ tel que la série $\sum a_n z_0^n$ soit convergente, alors la série entière $\sum a_n z^n$*

1. *converge absolument dans le disque ouvert $\{z : |z| < |z_0|\}$,*
2. *convergence uniformément dans tout disque fermé $\{z : |z| \leq \rho < |z_0|\}$.*

Théorème 1 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R et R'.*

1. *Si $R \neq R'$, la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R'' = \min(R, R')$.*
2. *Si $R = R'$, la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R'' \geq R$.*

3.2.2 Continuité

Théorème 2 *La somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $]-R, R[$, R désignant son rayon de convergence.*

3.2.3 Integration d'une série entière

Théorème 3 *Soient $R > 0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sa somme.*

Alors la série $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a le même rayon de convergence et sa somme vérifie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

3.2.4 Dérivation d'une série entière

Théorème 4 *Soient $R > 0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sa somme.*

Alors la série $\sum n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergence et sa somme vérifie $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+1} = f'(x)$.

3.2.5 Développement d'une fonction en série entière

- Problème direct : on se donne une série entière et on étudie sa convergence et les propriétés de sa limite
- Problème indirect : on se donne une fonction et on cherche à savoir si elle est la somme d'une série entière.

Théorème 5 ***Conditions nécessaires :*** *si une fonction f de la variable réelle coïncide avec une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence R, alors*

1. *Elle est C^{∞} pour $|x| < R$,*
2. *$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

La série $\sum \frac{f^{(n)}(0) x^n}{n!}$ est dite série de Taylor de la fonction f.

Théorème 6 ***Conditions suffisantes :*** *si pour $|x| < R$ une fonction f et toutes ses dérivées $f^{(n)}$ sont bornées par une constante C indépendante de x et de n $|f^{(n)}| < C$, alors $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)} x^n$*

Théorème 7 ***Principe des zéros isolés :*** *soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit f sa somme.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R$$

Si les coefficients a_n ne sont pas tous nuls, il existe un nombre $0 < r < R$ tel que $0 < |z| < r \Rightarrow f(z) \neq 0$

Conséquences :

- Soient $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sa somme. Si $f(z) = 0, |z| < R$ alors $a_n = 0 \forall n$.
- Soient $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ deux séries entières ayant le même rayon de convergence R. Soient f, g : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, |z| < R$. Si $f(z) = g(z)$ pour **tout** $|z| < R$, alors $a_n = b_n$.

4 Séries de Fourier

4.1 Séries trigonométriques

4.1.1 Fonction e^z

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

1. $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$,

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$,
3. $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad e^{z+2ik\pi} = e^z$.

4.1.2 Séries trigonométriques

On appelle série trigonométrique une série de fonctions $\sum u_n(x)$ où :

$$\begin{cases} u_0(x) = \frac{a_0}{2} \\ u_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \end{cases}$$

avec $a_n, b_n, \omega \in \mathbb{R}$

4.1.3 Convergence d'une série trigonométrique

Convergence uniforme : Si les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum u_n(x)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Convergence simple : Si les suites numériques a_n et b_n sont décroissantes et si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, alors la série trigonométrique $\sum u_n(x)$ converge simplement en tout point $x \neq 2k\pi$

4.1.4 Propriétés de la somme d'une série trigonométrique

1. Si la série trigonométrique $\sum u_n(x)$ converge en x_0 vers $S(x_0)$, alors elle converge en $x_0 + \frac{2\pi}{\omega}$ et $S(x_0 + \frac{2\pi}{\omega}) = S(x_0)$.
2. Si la série trigonométrique $\sum u_n(x)$ converge uniformément sur $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ vers S, alors
   (a) $a_p = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} S(x) \cos(n\omega x)\,\mathrm{d}x$,
   (b) $b_p = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} S(x) \sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x$.

4.1.5 Représentation complexe

Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a :

1. $\lambda = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} S(x)\, e^{-ik\omega x}\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}$
2. $\lambda = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} S(x)\, e^{-ik\omega x}\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}$

4.2 Représentation d'une fonction par une série trigonométrique

4.2.1 Coefficients de Fourier

Soit une fonction intégrable, périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

1. Les quantités : $a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x)\,\mathrm{d}x$,
   $b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x$.
   ou encore $\lambda = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\, e^{-ik\omega x}\,\mathrm{d}x$
   sont dites coefficients de Fourier de f.
2. La série trigonométrique :
   $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$, ou encore
   $\sum \lambda_k e^{ik\omega x}$ est dite série de Fourier de f.

4.2.2 Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction de la variable réelle.

1. On dit qu'elle a une discontinuité de première espèce en x si elle admet en ce point une limite à droite $f(x+0)$ et une limite à gauche $f(x-0)$.
2. On dit qu'elle admet en y une dérivée à droite (resp. à gauche) si la limite suivante existe et est finie : $\lim_{h>0\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\quad$ (*resp.* $\lim_{h<0\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$)

Soit f une fonction réelle de la variable réelle, périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, satisfaisant les conditions suivantes :

1. Les discontinuités de f dans l'intervalle d'une période sont de première espèce et en nombre fini.
2. La fonction f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier de f est convergente et :

$\frac{1}{2} f(x+0) + f(x-0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$

ou encore : $\frac{1}{2} f(x+0) + f(x-0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{ik\omega x}$.

4.2.3 Lemmes

- Soit une fonction intégrable bornée sur sur $[a,b]$, alors
  $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\frac{\omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\omega(x-t))}{\sin(\frac{\omega}{2}(x-t))}\,\mathrm{d}t = 1$

4.2.4 Inégalité de Bessel

- Soit f continue sur $[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$, et a_n, b_n ses coefficients de Fourier. Soient α_n, β_n deux suites réelles. On pose :
  $F_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos(k\omega x) + \beta_k \sin(k\omega x))$
  et on considère : $I(\alpha_n, \beta_n) = \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} |f(x) - F_n(x)|^2\,\mathrm{d}x$.
  Alors : $I(a_n, b_n) \leq I(\alpha_n, \beta_n)$
- Soient a_n, b_n les coefficients de Fourier de f. Alors : $\frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$.

4.2.5 Théorème de Parseval

Soient a_n, b_n les coefficients de Fourier d'une fonction continue f. Alors $\frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$.

5 Fonctions holomorphes

5.1 Fonctions de la variable complexe

On pose :

- $\cos(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!}$
- $\sin(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}$
- $\cosh(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p}}{(2p)!}$
- $\sinh(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}$
- Si on pose $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\rho > 0$ et $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$, on appelle logarithme complexe la fonction $\log_\alpha(z) = \ln(\rho) + i\theta$. En général, on prend $\alpha = -\pi$
- Mêmes conditions : la fonction puissance est $z_\alpha^m = e^{m \log_\alpha(z)}$

$$\sin 2a = 2\cos a \sin a$$

$$2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$\sin'(f(x)) = f'(x)\cos(f(x))$$

$$\cos'(f(x)) = -f'(x)\sin(f(x))$$

9 Fonction trigonométrique inverse

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)^2 + 1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arccos f(x)) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$$

10 Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$