5.2 Limites et continuité

On considère $z = x + iy$:

$$\begin{array}{ccc} f : z & \longmapsto & f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) \\ \mathbb{C} & \dashrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

Définition 1 *Une fonction holomorphe dans un domaine D est dite **entière** si elle est définie sur $\mathbb{C}$ tout entier.*

Définition 2 *On dit que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L = A + iB$ si on a :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 : |z - z_0| < \alpha \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon$$

Proposition 1

$$L = \lim_{z\to z_0} f(z) \Leftrightarrow \begin{array}{l} A = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} P(x,y) \text{ et} \\ B = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} Q(x,y) \end{array}$$

5.2.2 Continuité

f est continue en $z_0 \Leftrightarrow L = f(z_0)$

Proposition 2 *$f(z)$ est continue en $z_0 \Leftrightarrow P$ et Q le sont en (x_0, y_0)*

5.2.3 Dérivabilité

Proposition 3 *Pour que $f(z)$ admette une dérivée $f'(z_0)$, il faut et il suffit que l'on ait : $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)(f'(z_0) + \epsilon(z))$ avec $\lim\limits_{z\to z_0} \epsilon(z) = 0$*

Définition 3 (Conditions de Cauchy — Riemann)

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0).$$

- **Si** f est dérivable **alors** P et Q vérifient les conditions de Cauchy.
- **Si** f vérifie les conditions de Cauchy et que les dérivées partielles de P et Q sont continues, **alors** f est dérivable.
- $f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$

Définition 4 *Une fonction est **holomorphe** dans un domaine D si elle est dérivable en tout point de D.*

5.3 Fonctions holomorphes

Théorème 8

1. *La somme d'une série entière est holomorphe à l'intérieur de son disque de convergence et $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{(n-1)}$*
2. *Les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ sont holomorphes dans $\mathbb{C}$ et leurs dérivées sont respectivement e^z, $\cos z$, $-\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$*
3. *$\log z$ est holomorphe dans $\mathbb{C} - (\mathbb{R}^-, 0)$ et $\log'(z) = \frac{1}{z}$*

6 Pôles et résidus

6.1 Intégrale d'une fonction complexe

Définition 5 *On appelle intégrale de $f(z)$ sur l'arc de courbe C, le nombre complexe donné par deux intégrales curvilignes :*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (P\,dx - Q\,dy) + i\int_C (Q\,dx + P\,dy)$$

avec : $\int_C P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)\,dx$

Proposition 4 $\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt$

6.2 Théorème de Cauchy

6.2.1 Ouvre fermée simple et domaine simplement connexe

Définition 6 *Nous disons que le chemin (ou arc) est une **courbe fermée simple** s'il existe un intervalle $[a,b]$ et une application m telles que :*

- $m : [a,b] \longmapsto C$ *est continument différentiable ;*
- $m : [a,b[\longmapsto C$ *est injective ;*
- $m(a) = m(b)$.

Définition 7 *Nous disons qu'un domaine est simplement connexe si, pour tout couple fermée simple C située dans D, l'intérieur de C est tout entier dans D.*

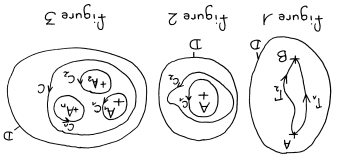
Théorème 9 (Cauchy) *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D et C une couple fermée simple située dans D ainsi que son intérieur. Alors $\int_C f(z)\,dz = 0$*

6.2.2 Conséquences du théorème de Cauchy

Théorème 10

1. *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe. Soient A, B deux points de D et Γ_1, Γ_2 deux chemins quelconques joignant A à B, tels que la courbe $C = A\Gamma_1 B\Gamma_2 A$ forme une couple fermée simple. Alors $\int_{A\Gamma_1 B} f(z)\,dz = \int_{A\Gamma_2 B} f(z)\,dz$ (figure 1).*
2. *Soient D un domaine, $A \in D$, f une fonction holomorphe dans $D\backslash\{A\}$, C_1, C_2 deux courbes fermées simples de D dont l'intérieur contient A et est situé dans D. Alors $\int_{C_1^+} f(z)\,dz = \int_{C_2^+} f(z)\,dz$. L'intégrale le long de C_1^+ signifie qu'elle est prise le long de C_1 dans le sens direct (figure 2).*
3. *Soit D un domaine simplement connexe, $A_1, \ldots, A_n$ n points de D, f une fonction holomorphe dans $D\backslash\{A_i\}$, C une couple fermée simple de D dont l'intérieur est contenu dans D et contient tous les points A_i. C_i une courbe fermée simple située dans l'intérieur de C entourant le point A_i et laissant les autres points $(A_j, i \neq j)$ à son extérieur (voir figure 3). Alors*

$$\int_{C^+} f(z)\,dz = \int_{C_1^+} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n^+} f(z)\,dz.$$



6.2.3 Formule intégrale de Cauchy

Théorème 11 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D contenant une courbe simple fermée C dont l'intérieur est situé dans D. Soit $a \in D$. Alors*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

Corollaire 1 *Une fonction holomorphe dans un domaine D admet des dérivées successives holomorphes dans D. La dérivée $n^{ième}$ de f au point $z \in D$ est donnée par :*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}du$$

6.3 Théorème des résidus

6.3.1 Développement en série entière de $z - a$

Théorème 12 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D, $A \in D$, d désigne a, et $D(a,r)$ un disque ouvert de centre a et de rayon r, $\forall z \in D(a,r)$ de circonférence C :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

avec

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C^+} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}du$$

6.3.2 Zéros d'une fonction holomorphe

Définition 8 *Soit $f(z) = (z-a)^p k(z)$, alors a est un zéro d'ordre p de f.*

Théorème 13 *Tout zéro d'une fonction holomorphe f non identiquement nulle est isolé*

6.3.3 Pôle d'ordre p d'une fonction holomorphe

Définition 9 *Soit g une fonction holomorphe dans un disque $D(a,\rho)$ de centre a et de rayon ρ. On dit que a est un pôle d'ordre p de g s'il existe une fonction holomorphe h, $h(a) \neq 0$ telle que*

$$g(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^p}, \quad \forall z \in D(a,\rho), z \neq a$$

6.3.4 Résidu d'un pôle

- *La partie $P_a = \frac{B_p}{(z-a)^p} + \frac{B_{p-1}}{(z-a)^{p-1}} + \cdots + \frac{B_1}{(z-a)}$ est dite **partie principale** relative au pôle a d'ordre p avec $B_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.*
- *Le coefficient B_{-1} de l'élément $\frac{1}{z-a}$, noté R_a est dit **résidu** relatif à a.*

6.3.5 Forme intégrale du résidu

Théorème 14

$$R_a = \frac{1}{2i\pi}\int_{C^+} f(z)dz$$

6.3.6 Théorème des résidus

Théorème 15 *Soit D un domaine de $A_k \in D$ n'ayant qu'un nombre fini de points A_k, $k = 1, \ldots, n$. Soit g une fonction holomorphe dans $D\backslash\{A_k\}$, les pôles de g d'ordre p_k et R_{a_k} les résidus de g relatif à a_k. Alors*

$$\int_{C^+} f(z)dz = 2i\pi(R_{a_1} + \cdots + R_{a_n})$$

Définition 11 *Une fonction f de variable complexe est dite analytique au point $z_0 \in \mathbb{C}$ s'il existe un disque ouvert D (z_0, r) et une série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$, convergente dans D telle que $\forall z \in D, f(z) = \sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$*

7 Quelques Compléments

7.1 Principe du prolongement analytique

Proposition 5 *Si deux fonctions f et g sont analytiques dans un domaine D. Si l'on a $f = g$ en tout point d'un ouvert $\theta \subset D$, alors $f = g$ en tout point de D.*

7.2 Principe du maximum

Proposition 6 *Soit f une fonction analytique dans un domaine D. Si $|f(z)|$ atteint son maximum en un point $z_0 \in D$, alors $f(z) = K$ où K est une constante, $\forall z \in D$.*

Théorème 16 (Lieuville) *Soit f une fonction analytique dans tout $\mathbb{C}$. Si f est bornée alors elle est constante.*

Théorème 17 (d'Alembert) *Tout polynôme $P(z)$ de degré n admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$.*

7.3 Tips techniques

Proposition 7

$$\alpha \neq 0, \frac{1}{z-\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{1-\frac{z}{\alpha}} = -\frac{1}{\alpha}\sum_{n\leq 0}\frac{z^n}{\alpha^n}$$

De même (par dérivation, et pour $|z| < |\alpha|$) :

$$\frac{1}{(z-\alpha)^2} = \frac{1}{\alpha}\sum_{n\leq 1}\frac{n z^{n-1}}{\alpha^n}$$

Proposition 8 *Soient a_n et b_n les coefficients de Fourier d'une fonction f.*

- *Si f est paire, b_n est nul*
- *Si f est impaire, a_n est nul*

Proposition 9 *Soit $g = P/Q$ une fonction meromorphe. Si c est un pole simple alors :*

$$R_g(c) = \frac{P(c)}{Q'(c)}$$

IPP :

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

8 Formules de trigonométrie

$$\begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \\ \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \\ \sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \\ \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \end{array}$$

1 Séries numériques

1.1 Convergence

1.1.1 Condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

1.1.2 Critère de convergence de Cauchy

La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall p > q > \eta,\ on\ ait\ \Big|\sum_{n=q+1}^{p} u_n\Big| < \varepsilon$$

1.1.3 Convergence absolue

La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.
Toute série absolument convergente est convergente.

1.2 Séries à termes positifs

1.2.1 CNS de convergence des séries à termes positifs

La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la somme $S_n = \sum_1^n u_k$ est majorée

1.2.2 Comparaison de 2 séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles telles que $u_n \leq v_n$. Alors pour $n \geq n_0$ on a :
– si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
– si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge. (contraposée)
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques à termes positifs tels que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \alpha \neq 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergentm ou divergent en même temps)

1.2.3 Règle de Cauchy

Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ existe et est égale à l, alors :

1. si l<1, la série $\sum u_n$ converge
2. si l>1, la série $\sum u_n$ diverge

1.2.4 Règle de d'Alembert

Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n+1}{u_n}$ existe et est égale à l :

1. si l<1, la série $\sum u_n$ converge
2. si l>1, la série $\sum u_n$ diverge

1.2.5 Comparaison avec une intégrale

Soit f une fonction réelle de la variable réelle, positive et décroissante. La série $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ l'est aussi.

1.2.6 Corollaire

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, dite de Riemann, est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $0 < \alpha \leq 1$

1.3 Séries à terme quelconque

1.3.1 Théorème d'Abel

On considère la série $\sum a_n u_n$. a_n étant une suite de nombre réels et u_n une suite de nombre réels ou complexes. Si

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
2. la série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ converge
3. il existe une constante M telle que $|u_n + \ldots + u_m| < M, \forall n, m$

alors la série $\sum a_n u_n$ converge

1.3.2 Convergence d'une série alternée

Si le terme général $v_n \geq 0$ est décroissant et tend vers 0 à l'infini, alors la série alternée $\sum (-1)^n v_n$ est convergente

1.4 Série à termes complexes

Pour que la série à terme complexe $z_n = a_n + ib_n$ soit convergente, il faut et il suffit que les séries réelles de termes généraux a_n et b_n le soient. Dans ce cas,

$$s = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Toute série à terme complexe absolument convergente est convergente.

2 Séries de fonctions

2.1 Suites de fonctions

Convergence simple : $\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
Convergence uniforme : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in (a,b)$

Toute suite qui converge uniformément vers f sur (a,b) converge aussi simplement vers f sur (a,b), mais la réciproque est fausse

2.2 Séries de fonctions

2.2.1 Critère de convergence de Cauchy

Convergence simple : $\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 :\ \forall p > q > n_0,\ |f_{q+1}(x) + \ldots + f_p(x)| < \varepsilon$
Convergence uniforme : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 :\ \forall p > q > n_0,\ |f_{q+1}(x) + \ldots + f_p(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in (a,b)$

2.2.2 Convergence normale

$\sum v_n$ une série numérique à termes positifs convergente : Si $\forall n \geq n_0,\ |f_n(x)| < v_n,\ \forall x \in (a,b)$, alors $\sum f_n$ est absolument et uniformément convergente (= normalement convergente)

2.3 Propriétés

Si les f_n sont continues sur (a,b) et que $\sum f_n$ est uniformément convergente vers f sur (a,b), alors
– sa somme f est aussi continue sur (a,b)
– $\sum \int_a^b f_n(x)dx$ converge et a pour somme $\int_a^b f(x)dx$
Si

1. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f,

où C est la circonférence d'un disque de centre z contenu dans D

– D'après le Principe des zéros isolés, si une telle série existe, elle est unique.
– f admet en tout point de D des dérivées de tout ordre :

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k(z-z_0)^{k-n}$$

$$f^{(n)}(z_0) = (n!)a_n$$