2 Applications linéaires et matrices

2.1 Application linéaire définition

Définition 8 *Une application linéaire $u : E \to F$ possède les propriétés suivantes :*
- $u(\vec{x}+\vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}) \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$
- $u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) \qquad \forall \vec{x} \in E, \lambda \in K$

Une application linéaire est donc un espace vectoriel.

2.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 9 *L'image par u du vecteur nul de E est toujours le vecteur nul de F.*

Définition 10
- $\ker u = \{\vec{x} \in E | u(\vec{x}) = \vec{0}\}$
- $\operatorname{Im} u = \{u(\vec{x}) | \vec{x} \in E\}$

Définition 11 *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, alors on a les propriétés suivantes :*
- *L'image par u d'une famille liée de E est une famille liée de F*
- *L'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de* $\operatorname{Im} u$

2.3 Projection

Définition 12 *Soit un espace vectoriel E, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2$, on appelle projection ou encore projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 l'application u de E dans E définie par : $u(\vec{x}) = \vec{x}_1$ si $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ où $\vec{x}_1 \in F_1, \vec{x}_2 \in F_2$*

2.4 Détermination d'une application linéaire

Définition 13 *Soient $\mathcal{E} = \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E;F)$, alors u est entièrement définie par la famille de vecteurs $u(\vec{e}_j)_{j=1,\ldots,n}$ (cette famille est génératrice de* $\operatorname{Im} u$*).*

Définition 14 *Soient $u \in \mathcal{L}(E;F), \vec{x} \in E, \mathcal{E} = \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ une base de E, $\mathcal{F} = \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ une base de F. Si on connait les composantes de $\vec{x}$ et des vecteurs $u(\vec{e}_j)$:*

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j \quad , \quad u(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_i, j = 1, \ldots, n$$

Si on a $\vec{y} = u(\vec{x})$ alors

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{f}_i \text{ avec } y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = 1, \ldots, m$$

2.5 Caractérisation de injective, surjective et bijective

Théorème 2 *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, alors on a les trois équivalences :*
- *u est injective*
- $\ker u = \vec{0}$
- *l'image par u de toute famille libre de E est une famille libre de F*

Théorème 3 *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, alors on a les trois équivalences :*
- *u est surjective*
- $\operatorname{Im} u = F$
- *l'image par u de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de F*

Théorème 4 *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, alors on a les trois équivalences :*
- *u est bijective*
- $\operatorname{Im} u = F$ *et* $\ker u = \vec{0}$
- *l'image par u de toute base de E est une base de F*

2.6 Isomorphismes

Définition 15
- *homomorphisme : appl. lin. de E dans F*
- *endomorphisme : appl. lin. de E dans E*
- *isomorphimse : appl. lin. bijective de E dans F*
- *automorphimse : appl. lin. bijective de E dans E*

Définition 16 *La réciproque ou inverse de $\phi : E \to F$ notée ϕ^{-1} est telle que $\phi^{-1} \circ \phi = i_E$ et $\phi \circ \phi^{-1} = i_F$ Si ϕ^{-1} est définie, ϕ et ϕ^{-1} sont des isomorphismes.*

2.7 Matrices

Définition 17 *Soient E et F deux espaces vectoriels munis des bases $\mathcal{E} = \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ et $\mathcal{F} = \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ et $u \in \mathcal{L}(E;F)$. On appelle matrice de u dans les bases de E et de F le tableau A de scalaires à m lignes et n colonnes dont la j^e colonne est composée des composantes de $u(\vec{e}_j)$ dans la base de F. Ainsi pour $j = 1, 2, \ldots, n$ on peut écrire $u(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_i$. On appelle $\mathcal{M}_{mn}$ la matrice à m lignes et n colonnes*

Définition 18 *Si la matrice A est carrée, on a : trace $(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$*

Définition 19 *A_j représente la j^e colonne de A, $\underline{A_i}$ représente le i^e ligne de A*

2.8 Espace vectoriel des matrices

Définition 20 *Si $A + B = C$ alors $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$*

Définition 21 *Si $\lambda A = C$ alors $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.*

2.9 Produit de deux matrices

Définition 22 *$A \to u$, $B \to v$ et $C \to w$ alors $C = AB \Rightarrow w = u \circ v$ et $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, p$*

Définition 23 *Si A est une matrice carrée, la matrice inverse de A notée A^{-1} est définie par $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. De plus $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*

2.10 Transposée d'une matrice

Définition 24 *Si $A \in \mathcal{M}_{mn}$, la matrice transposée de A est $A^T \in \mathcal{M}_{nm}$ et $(a^T)_{ij} = a_{ji}$. On a la propriété suivante : $(AB)^T = B^T A^T, (A^T)^T = A, (A+B)^T = A^T + B^T, (\lambda A)^T = \lambda A^T$*

2.11 Changement de base et composantes

Définition 25 *Soit $\mathcal{E} = \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ et $\mathcal{E}' = \vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n$ deux bases de E, la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$ est obtenue en mettant en colonnes les composantes de la nouvelle base $\mathcal{E}'$ dans la base $\mathcal{E}$.*

Proposition 8 *Soit $\vec{x} \in E$ et soit $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ et $(\vec{x}'_1, \ldots, \vec{x}'_n)$ les composantes de $\vec{x}$ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, alors on a $X' = PX$ ou encore $X' = PX$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$*

2.12 Changement de base et matrices

Théorème 5 *Soit $u \in \mathcal{L}(E;E)$, A et A' les matrices représentant u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, alors si P est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$, on a la relation $A' = P^{-1}AP$*

2.13 Matrices semblables

Définition 26 *Si il existe P inversible telle que $A' = P^{-1}AP$, A et A' sont dites semblables. Si A et B sont semblables, A^T et B^T sont semblables ,leurs traces sont égales et si B et C sont semblables, A et C sont semblables.*

2.14 Rang

Définition 27 *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, on appelle rang de u et on note* $\operatorname{Rang}(u)$ *la dimension de* $\operatorname{Im}(u)$*.*

Définition 28 *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$ alors $\operatorname{Im} A = \{Y \in \mathcal{M}_{m1}$ tel que $Y = AX$, avec $X \in \mathcal{M}_{n1}\}$*

Définition 29 *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$ alors* $\operatorname{Im}(A)$ *est le sous espace vectoriel engendré par les colonnes de A*

Proposition 9
- *Si A et A' sont semblables alors elles ont le même rang*
- *A et A^T ont le même rang*

2.15 Rang et dimension du noyau d'une application

Théorème 6 *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$ alors* $\dim[\ker u] + \operatorname{Rang} u = \dim E$

Proposition 10 *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$,* $\dim(E) = \dim(F)$ *alors ces propositions sont équivalentes*
- *u injective*
- *u surjective*
- *u bijective*

2.16 Noyau d'une matrice

Définition 30 *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$ alors $\ker A = \{X \in \mathcal{M}_{n1}, AX = 0\}$ De plus* $\dim[\ker A] + \dim[\operatorname{Im} A] = n$

Proposition 11 *Si $A \in \mathcal{M}_{nn}$ alors A inversible $\Longleftrightarrow$* $\ker A = \{0\} \Longleftrightarrow \operatorname{Rang} A = n$

3 Déterminants

3.1 Définition des déterminants, propriétés et calcul

3.1.1 Définition du déterminant par récurence

Proposition 12 *La définition permet d'obtenir immédiatement la propriété suivante : Si $\bar{A}$ est la matrice dont les termes $\underline{\text{sont}}$ les conjugués de ceux de A ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) alors* $\det \bar{A} = \overline{\det A}$.

3.1.2 Définition d'une famille de vecteur

Si E est une base orthonormée de dimention 2, alors $\det(\vec{x}, \vec{y})$ est l'aire (algébrique) du parallélogramme construit sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Le signe est positif si l'angle orienté $(\vec{x}, \vec{y})$ est tel que $0 \le (\vec{x}, \vec{y}) \le \pi (\text{mod } 2\pi)$; sinon, il est négatif (si si...).

3.1.3 Le déterminant et les formes multilinéaires

Théorème 7 *Le déterminant est une fonction linéaire de chaque colonne, donc une* ***application multi-linéaire*** *de l'ensemble des colonnes.*

Proposition 13
- *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}, \lambda \in \mathbb{K}$ alors* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- *Si une colonne de A est nul alors* $\det A = 0$.

3.1.4 Propriétés du déterminant liées aux colonnes adjacentes

Proposition 14 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Si deux colonnes ou lignes sont égales, le déterminant est nul.*
2. *Si on échange entre elles deux colonnes ou lignes de la matrice, le déterminant change de signe.*

Théorème 8 *Le déterminant d'une matrice ne change pas si à une colonne (resp. lignes) on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).*

3.1.5 Propriétés du déterminant liées aux lignes

Théorème 9 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors* $\det A = \det A^T$.

Théorème 10 *Le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ vérifie la propriété suivante : le déterminant est une fonction multilinéaire de chacune des lignes,*

Proposition 15 *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.*

3.2 Autres propriétés et utilisations des déterminants

3.2.1 Déterminant d'un produit de matrices

Théorème 11 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors* $\det(AB) = \det A \, \det B$.

3.2.2 Déterminant d'une base de vecteurs

Théorème 12 *Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{E}$ de référence, soient $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$, n vecteurs de E alors on a l'équivalence suivante :*

$$\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\} \text{ base de } E \Longleftrightarrow \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \neq 0$$

5 Espaces euclidiens

5.1 Produit scalaire, norme, espace euclidien

5.1.1 Définition du produit scalaire

Définition 40 *On appelle* ***produit scalaire*** *dans un espace vectoriel réel E, une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ notée $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ possédant les propriétés suivantes :*

1. *Elle est bilinéaire :*
   - $\langle \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \alpha_1 \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \alpha_2 \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle$
   - *Pareil sur y*
2. *elle est définie positive :*
   - $\forall \vec{x} \in E, \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \ge 0$
   - $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$
3. *elle est symétrique : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$*

5.1.2 Produit scalaire et transposition

Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = X^T Y = Y^T X = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Proposition 33 *Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ alors $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ vérifie :*
$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$
(le produit scalaire de gauche est dans $\mathbb{R}^m$ et l'autre dans $\mathbb{R}^n$.)

5.1.3 Inégalité de Cauchy – Schwartz

Proposition 34 (Inégalité de Cauchy – Schwartz) *On a $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \le \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$ avec égalité ssi $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires.*
L'inégalité peut aussi s'écrire $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \le \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \sqrt{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}$

5.1.4 Définition de la norme

Définition 41 *On appelle* ***norme*** *sur un espace vectoriel réel E, une application de E dans $\mathbb{R}^+$ notée $\vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|$ possédant les propriétés suivantes :*

1. $\|\vec{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
2. $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \, \|\vec{x}\| \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 42 *On appelle* ***espace vectoriel normé*** *un espace vectoriel réel muni d'une norme.*

5.1.5 Définition de l'espace euclidien

Proposition 35 *Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, alors l'application $\vec{x} \mapsto \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ définit une norme sur E.*

Définition 43 *Un* ***espace euclidien*** *est un espace vectoriel normé de dimension finie, dont la norme est issue d'un produit scalaire.*

ATTENTION : à un produit scalaire, on peut associer une norme **mais la réciproque est fausse !**

5.2 Orthogonalité

5.2.1 Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux

Définition 44 *Soit un espace euclidien E.*

1. *Deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont* ***orthogonaux*** *si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.*
2. *Une famille de vecteur $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ est* ***orthogonale*** *si $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0, \forall i \neq j$. Elle est* ***orthonormée*** *ou* ***orthonormale*** *si de plus $\|x_i\| = 1, \forall i = 1, \ldots, p$.*
3. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle* ***orthonormal de*** *F dans E et on note $F^\perp$, le sous-espace vectoriel $F^\perp = \{\vec{x} \in E | \forall \vec{y} \in F, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0\}$.*

Proposition 36 *Une famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace euclidien est libre.*

5.2.2 Procédé d'orthogonalisation de Schmidt

Proposition 37 (Orthogonalisation de Schmidt) *Soit $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ une famille libre de E, alors il existe une famille orthonormée $\mathcal{Y} = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_p\}$ telle que : $vect\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p \rangle = vect\langle \vec{y}_1, \vec{y}_p \rangle, \forall k = 1, \ldots, p$. Dans la pratique, on calcule les vecteurs $\vec{y}_i$ de la façon suivante : $\vec{\tilde{y}}_i = \vec{x}_i + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{y}_k$ avec $\beta_k = -\langle \vec{x}_i, \vec{y}_k \rangle$. Ensuite, $\vec{y}_i = \frac{\vec{\tilde{y}}_i}{\|\vec{\tilde{y}}_i\|}$.*

5.2.3 Décomposition d'un espace euclidien en sous-espaces orthogonaux

Théorème 20 *Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E, alors $E = F \oplus F^\perp$.*

5.2.4 Définition et caractérisation des matrices orthogonales

Définition 45 *On dit que $Q \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si pour tout $1 \le i, j \le n, (Q_i)^T Q_j = \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.*

Proposition 38 *Une matrice est orthogonale $\Longleftrightarrow Q^{-1} = Q^T$. De plus le déterminant d'une matrice orthogonal est égale à ± 1*

5.2.5 Matrice de passage entre 2 bases orthonormées

Proposition 39 *Soit $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{\vec{b}'_1, \ldots, \vec{b}'_n\}$, deux bases orthonormées d'un même espace euclidien E, alors la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale.*

5.2.6 Propriété des matrices orthogonales

Proposition 40 *Les matrices orthogonales ont les deux propriétés importantes suivantes :*
- *la transposée (donc aussi l'inverse) d'une matrice orthogonale est orthogonale ;*
- *un produit de matrices orthogonales est orthogonal.*

Proposition 41 ***Lien entre matrice orthogonale, norme et produit scalaire dans*** $\mathbb{R}^n$
- *Une matrice Q orthogonale conserve la norme des vecteurs ($\|x\| = \|Qx\|$ avec $\|.\|$ norme usuelle).*
- *Une matrice orthogonale conserve le produit scalaire ($\langle x, y \rangle = \langle Qx, Qy \rangle$).*

5.3 Diagonalisation des matrices symétriques

Théorème 21 *Soit $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, alors :*
- *A a toutes ses valeurs propres réelles*
- *il existe une base orthonormée de vecteurs propres de A*
- *A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et il existe une matrice P orthogonale telle que $D = P^T AP$ soit une matrice diagonale.*

5.4 Formes quadratiques

5.4.1 Matrice définie positive

Définition 46 *On dit qu'une matrice est semi-définie positive si $x^T Ax \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. On dit qu'elle est définie positive si de plus $x^T Ax = 0 \Rightarrow x = 0$.*

Proposition 42
- *A définie positive $\Rightarrow a_{ii} > 0 \; \forall i$*
- *A semi-définie positive $\Rightarrow a_{ii} \ge 0 \; \forall i$*

Proposition 43 *Une matrice symétrique définie positive est inversible.*

5.4.2 Définition d'une forme quadratique

Définition 47 *On appelle forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, un polynôme homogène de degré 2 en les variables ($x_1, \ldots, x_n$), c'est à dire une expression de la forme :*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} \beta_{ij} x_i x_j$$

Proposition 44 *Une condition nécessaire et suffisante pour que q soit une forme quadratique est qu'il existe une matrice symétrique A appartenant à $M_{nn}(\mathbb{R})$ telle que $q(x) = x^T Ax$, cette matrice étant unique.*

De plus A se retrouve par $a_{ii} = \alpha_i$ et $a_{ij} = a_{ji} = \beta_{ij}$.

5.4.3 Forme quadratique définie positive

Définition 48 *On dit que la forme quadratique $q(x) = x^T Ax$ est*
- *définie positive si la matrice A est définie positive,*
- *semi-définie positive si la matrice A est semi-définie positive.*

5.4.4 Réduction de Gauss d'une forme quadratique

Définition 49 *Premiere méthode (il y a des termes aux carrés dans votre forme quadratique) : On regroupe tous les termes faisant intervenir une même variable dans un polynôme q^* et on factorise, par ex pour x_1 : $q^*(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ donnera $q^*(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2$ puis on recommence avec chacune des variables pour obtenir seulement une addition de termes au carré.*

Définition 50 *Deuxieme méthode (il n'y a pas de termes aux carrés dans votre forme quadratique) : On regroupe tous les termes faisant intervenir deux même variables dans un polynôme q^* et on factorise, par ex pour x_1 et x_2 : $q^*(x) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4$ donnera $q^*(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4)^2 - (x_1 - x_2 + 3x_4)^2 - 4(x_3 + x_4)(x_3 - 2x_4)$*

On peut être amené à utiliser l'identité :
$ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2)$

On recommence la réduction avec la premiere méthode si des termes au carré apparaissent sinon on continue avec cette méthode et on recommence avec chacune des variables pour obtenir seulement une addition de termes au carré.

5.5 Espace hermitien

5.5.1 Forme sesquilinéaire

Définition 51 *On appelle* ***forme sesquilinéaire*** *sur $E \times E$, une application ϕ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :*
- *Elle est linéaire par rapport à son premier argument*

$$\phi(\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2, \vec{y}) = \lambda \phi(\vec{x}_1, \vec{y}) + \mu \phi(\vec{x}_2 + \vec{y}) \forall \lambda, \mu, \in \mathbb{C}$$

- *Elle est* ***anti-linéaire*** *par rapport à son deuxième argument*

$$\phi(\vec{x}, \lambda \vec{y}_1 + \mu \vec{y}_2) = \bar{\lambda} \phi(\vec{x}, \vec{y}_1) + \bar{\mu} \phi(\vec{x}, \vec{y}_2) \forall \lambda, \mu, \in \mathbb{C}$$

5.5.2 Produit hermitien, espace hermitien, matrice hermitienne

Définition 52 *On appelle* ***forme sesquilinéaire hermitienne*** *sur E une forme sesquilinéaire $(\vec{x}, \vec{y}) \to \phi(\vec{x}, \vec{y})$ de $\underline{E \times E}$ dans $\mathbb{C}$ possédant la propriété suivante : $\phi(\vec{y}, \vec{x}) = \overline{\phi(\vec{x}, \vec{y})}$, c'est l'analogue de la forme bilinéaire symétrique.*

Définition 53 *On appelle produit hermitien sur E, une forme sesquilinéaire ϕ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, hermitienne et définie positive, c'est à dire : $\phi(\vec{x}, \vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ en effet $\phi(\vec{x}, \vec{x}) \in \mathbb{R}$*

Définition 54 *Un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie muni d'un produit hermitien est appelé espace hermitien.*

Définition 55 *Soit $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$, on appelle adjointe de A et on note A^* la matrice $A^* = \bar{A}^T$. On dit que A est une matrice hermitienne si $A^* = A$*

5.5.3 Orthogonalité dans les espaces hermitiens

Définition 56 *Si E est un espace hermitien, on dit que 2 vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux si leur produit hermitien est nul. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.*

Définition 57 *On dit que la matrice $H \in M_{nn}(\mathbb{C})$ est unitaire si $H^* H = I$.*

Théorème 22 *Une matrice hermitienne a toutes ses valeurs propres réelles et est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. La matrice de changement de base qui intervient alors est unitaire.*

6 Équations différentielles

6.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $I \times \mathbb{R}$, alors si f vérifie la **condition de Lipschitz** suivante :

Il existe une constante $L > 0$ telle que $\forall t \in I, x, z \in \mathbb{R}, |f(t,x) - f(t,z)| \le L|x - z|$,

alors le système

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admet une solution unique pour tout $t \in I \forall x_0 \in \mathbb{R}$.