1 Espaces vectoriels

1.1 Généralités

1.1.1 Groupe

Définition 1 *On appelle* ***groupe*** *un ensemble G muni d'une* ***loi de composition interne*** *(c'est à dire d'une application de $G \times G$ dans G), notée par exemple $(x,y) \to (x \hat{+} y)$, qui possède les propriétés suivantes :*

(i) elle est ***associative*** *: $\forall x,y,z \in G$ on a $(x \hat{+} y) \hat{+} z = x \hat{+} (y \hat{+} z)$,*

(ii) elle admet un élément neutre : $\exists e \in G$ tel que, $\forall x \in G$ on a $e \hat{+} x = x \hat{+} e = x$,

(iii) tout élément admet un ***symétrique*** *(ou* ***opposé*** *ou* ***inverse*** *qui est nécessairement unique) : $\forall x \in G, \exists \tilde{x} \in G$ tel que $\tilde{x} \hat{+} x = x \hat{+} \tilde{x} = e$.*

Un groupe est ***commutatif*** *si la loi de composition est commutative.*

1.1.2 Espaces vectoriels

Définition 2 *Soit $\mathbb{K}$ un corps (ses éléments sont des scalaires) commutatif. On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ un ensemble E sur lequel on a défini deux lois de composition :*
- *une loi interne $\hat{+}$ telle que $(E, \hat{+})$ soit un* ***groupe commutatif***
- *une loi externe définie de $\mathbb{K} \times E$ dans E qui possède les propriétés suivantes : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$:*
  - $(\lambda\mu).\vec{x} = \lambda.(\mu.\vec{x})$
  - $(\lambda + \mu).\vec{x} = \lambda.\vec{x} \hat{+} \mu.\vec{x}$
  - $\lambda.(\vec{x} \hat{+} \vec{y}) = \lambda.\vec{x} \hat{+} \lambda.\vec{y}$
  - $1.\vec{x} = \vec{x}$ *(1 élément unité de K)*

Définition 3 *Soit F une partie* ***non vide*** *de E. F est un* ***sous- espace vectoriel*** *de E si et seulement si :*
- $F \neq \emptyset$,
- $\vec{x}, \vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} \hat{+} \vec{y} \in F$,
- $\lambda \in \mathbb{K}, \vec{x} \in F \Rightarrow \lambda.\vec{x} \in F$.

Proposition 1 *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous espace vectoriel et $F \cup G$ n'en est en général pas un.*

Définition 4
- *On appelle* ***somme*** *de deux sous-espaces vectoriels F et G (d'un espace vectoriel E) le sous-espace vectoriel H de E noté $F+G$ tel que $H = \{\vec{x} \in E | \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}, \vec{y} \in F, \vec{z} \in G\}$.*
- *On dit que F et G sont en* ***somme directe*** *si $F \cap G = \vec{0}$ et on note alors $H = F \oplus G$.*
- *On dit que F et G sont* ***supplémentaires*** *dans E si E est la somme directe de F et G.*

Remarque : H est un sous-espace vectoriel de E

Proposition 2 *Si $H = F \oplus G$ alors $\forall \vec{x} \in H$, il existe un couple unique $(\vec{x}, \vec{y}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. En particulier si $E = F \oplus G$ alors tout vecteur $\vec{x} \in E$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1.2.1 Familles

Proposition 3

1. *Si deux vecteurs d'une famille $S = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ sont égaux (par exemple $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$) alors la famille S est liée.*
2. *Si l'un des vecteurs de S est le vecteur nul, alors S est liée.*
3. *Toute sur-famille d'une famille liée est liée (Attention : n'ajouter que des vecteurs du même espace).*
4. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*
5. *Soit $\mathcal{L} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$ une famille* ***libre*** *et $\vec{x}$ un vecteur tel que $\mathcal{L} \cup \{\vec{x}\}$ est liée, alors $\vec{x}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{L}$.*
6. *soit $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$ une famille libre et $\vec{x}$ admettant une decomposition de la forme $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{x}_i$ alors les coefficients $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont uniques.*

Définition 5 *On dit que la famille (finie) $S = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ de vecteurs de E est* ***génératrice*** *de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p$. On dit qu'un espace vectoriel est de* ***type fini*** *s'il admet une famille génératrice finie.*

Proposition 4 *Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice*

1.2.2 Bases

Définition 6 *Une famille* ***libre et génératrice*** *est appelée une* ***base****.*

Proposition 5
- *Une famille $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur $\vec{x} \in E$ se décompose de manière unique sur $\mathcal{E}$.*
- *$\mathcal{E}$ est une base $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}$ est une famille génératrice minimale $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}$ est une famille libre maximale.*

1.2.3 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 1 *Dans un espace vectoriel de type fini, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

Définition 7 *Soit E un espace vectoriel de type fini différent de $\{\vec{0}\}$, on appelle* ***dimension*** *de E et on note* ***dim***(E) *le nombre d'éléments d'une base quelconque de E. Si $E = \{\vec{0}\}$ sa dimension est nulle par définition (c'est d'ailleurs le seul espace vectoriel de dimension nulle).*

Proposition 6 *Soit E un espace vectoriel de dimension n,*
- *Toute famille libre de n éléments est une base,*
- *Toute famille génératrice de n éléments est une base,*
- *Toute famille de plus de n vecteurs est liée,*
- *Toute famille de moins de n vecteurs ne peut pas être génératrice.*

Proposition 7 *Soit E un espace vectoriel de dimension n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

1. $\dim(F) \leq \dim(E)$,
2. $\{\dim(F) = \dim(E)\} \Longleftrightarrow \{E = F\}$,
3. $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$,
4. $\{E = F \oplus G\} \Longleftrightarrow \{\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)\}$ *et* $\{F \cap G = \{\vec{0}\}\}$.

3.2.3 Déterminant et matrice inversible

Théorème 13 *A est inversible* $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$

Théorème 14 *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est inversible alors* $\det A^{-1} = 1/(\det A)$.

Proposition 16 *A est inversible s'il existe une matrice B telle que $BA = I$. La matrice B est alors l'inverse de A*

3.2.4 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 17 *Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.*

Définition 31 *Soit $u \in \mathcal{L}(E,E)$, où E est de dimention finie, on appelle* **déterminant de u** *le déterminant de toutes matrices représentant u dans une base arbitraire.*

3.2.5 Rang d'une matrice

Définition 32 *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, on appelle* ***matrice extraite*** *de A une matrice obtenue en sélectionnant des lignes et des colonnes de A.*

Théorème 15 *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ alors le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe une matrice carrée inversible $\hat{A} \in \mathcal{M}_{r,r}$ extraite de A.*

Proposition 18 *Soit E un espace vectoriel de dimention n muni d'une base. Soit $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r)$ une famille de r vecteur de E avec $r \leq n$. On note X_i le vecteur colonne constitué des composantes de $\vec{x}_i$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{K})$. Alors la famille $\mathcal{X}$ est libre si et seulement si il existe une matrice carrée $r \times r$ extraite de X qui est inversible.*

Proposition 19 *On a* $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$.

3.3 Systèmes linéaires

3.3.1 Existence de la solution d'un système de matrice carrée

Théorème 16 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ le système $Ax = b$ admet une solution si et seulement si $b \in \text{Im}\, A$*

Théorème 17 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}, B \in \mathcal{M}_{n,1}$ le système $Ax = b$ admet une solution unique si et seulement si* $\det A \neq 0$.

3.3.2 Résolution de $Ax = b$ par la méthode de Cramer

Théorème 18 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ une matrice, b et $x \in \mathcal{M}_{n,1}$ tels que $Ax = b$. Alors pour tout $j = 1, \ldots, n$, on a la* ***formule de Cramer :***

$$\det(A_1, \ldots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \ldots, A_n) = x_i \det A$$

Proposition 20 *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ et $\det A \neq 0$, on obtient la solution de $Ax = b$ par la formule de Cramer :*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}$$

avec $\Delta_i = \det(A_1, \ldots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \ldots, A_n)$

3.3.3 Existence des solutions d'un système linéaire inhomogène

Proposition 21 *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est une matrice de rang r, si les r premières colonnes de A forment une famille libre, alors $Ax = b$ a une solution si et seulement si b appartient au sous-espace engendré par les r premières colonnes de A.*

3.3.4 Calcul pratique de l'inverse d'une matrisse

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = y_1 \\ x_1 & +x_2 & & = y_2 \\ & +x_2 & +x_3 & = y_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = & y_1 & & -y_3 \\ x_2 = & -y_1 & +y_2 & +y_3 \\ x_3 = & y_1 & -y_2 & \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.5 Calcul théorique de l'inverse de A

Définition 33 *On appelle* ***co-matrice*** *de A et on note $co(A)$ la matrice des cofacteur de A :*

$$co(A)_{ij} = cof(-1)^{i+j} \det A_{|i,j|}$$

Théorème 19

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(co(A))^T$$

Tip technique : Si $A \in \mathcal{M}_{22}$, le calcul est direct :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

4 Valeurs propres — Vecteurs propres

4.1 Vecteurs propres — Valeurs propres

4.1.1 Valeur et vecteur propres d'un endomorphisme

Définition 34 *On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une* ***valeur propre*** *de u s'il existe un vecteur $\vec{y} \in E$ non nul tel que $u(\vec{y}) = \lambda \vec{y}$ et $\vec{y}$ est appelé un* ***vecteur propre*** *de u associé à la valeur propre λ.*

4.1.2 Valeur et vecteur propres d'une matrice

Définition 35 *On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une* ***valeur propre*** *de $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ s'il existe un vecteur $Y \in \mathcal{M}_{n,1}, Y \neq 0$ tel que $AY = \lambda Y$. Dans ce cas on dit que Y est un* ***vecteur propre*** *associé à la valeur propre λ et que (λ, Y) est un couple propre de A.*

- Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses termes diagonaux.
- A non inversible $\Longleftrightarrow$ 0 est valeur propre de A.

4.1.3 Polynôme caractéristique

Définition 36 *On appelle* ***polynôme caractéristique*** *de A le polynôme $\Pi_A(s) = \det(sI - A)$.*

Le polynôme caractéristique de A est de degré n et plus précisement il est de la forme $\pi_A(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$.

Proposition 22 *Une condition nécéssaire et suffisante pour que λ soit valeur propre de A est que $\lambda \in \mathbb{K}$ et qu'elle soit racine du polynôme caractéristique, c'est-à-dire* $\det(\lambda I - A) = 0$.

Définition 37 *On appelle* ***multiplicité*** *de la valeur propre λ_i la multiplicité de la racine correspondante du polynôme caractéristique.*

4.1.4 Valeur propres et matrices particulière

Proposition 23 *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux.*

Proposition 24 *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors A et A^T ont les mêmes polynômes caractéristiques et donc les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.*

4.1.5 Valeurs propres et matrice semblables

Proposition 25 *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique et en particulier les mêmes valeurs propres.*

4.2 Matrices à coefficients complexes

Proposition 26 *Si A est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ qui admet p valeurs propres complexes distinctes notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, si on note r_i la multiplicité de λ_i alors $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$*

Proposition 27 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et soient $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ ses valeurs propres complexes (distinctes ou confondues), alors*
- *la trace de A est égale à la somme de ses valeurs propres.*
- *le déterminant de A est égal au produit de ses valeurs propres.*

4.3 Sous-espace propre

Définition 38 *Soit λ une valeur propre de A, on appelle* ***sous-espace propre*** *associé à λ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}$, noté V_λ, défini par $V_\lambda = \{Y \in \mathcal{M}_{n1} | AY = \lambda Y\}$.*

Proposition 28 *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ p valeurs propres distinctes d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{nn}$ et soient $\{Y_1, \ldots, Y_p\}$ p vecteurs propres associés, alors la famille $\{Y_1, \ldots, Y_p\}$ est libre.*

Proposition 29 *Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.*

Proposition 30 *Soit r_i la multiplicité de λ_i et d_i la dimension de V_{λ_i}, alors $d_i \leq r_i$.*

4.4 Réduction d'une matrice

4.4.1 Diagonalisation

Définition 39 *$A \in \mathcal{M}_{nn}$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ s'il existe $D \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.*

Remarque : A et D ont les mêmes valeurs propres, ce sont les éléments de la diagonale de D. De plus, les colonnes de P sont les vecteurs propres correspondants.

Proposition 31 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
- *A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$*
- *A admet une base de vecteurs propres dans $\mathbb{K}$ (base de $\mathcal{M}_{n1}$)*
- *A admet p valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ vérifiant*

$$\sum_{i}^{p} r_i = n \text{ et } d_i = r_i \forall i \in [1,p]$$

- *A admet p valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ vérifiant*

$$\sum_{i}^{p} d_i = n$$

Proposition 32 *Aadmet n valeurs propres dans K toutes distinctes $\Rightarrow$ A diagonalisable (condition* ***non nécessaire****).*

4.4.2 Applications

Calcul de la puissance d'une matrice : Si $A = PDP^{-1}$ alors $A^k = PD^kP^{-1}$

Système de suites récurrentes : Soient u_n et v_n deux suite réelles telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = a_{11}u_n + a_{12}v_n, n \in \mathbb{N} \\ v_{n+1} = a_{21}u_n + a_{22}v_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Le système précédent s'écrit alors $X_{n+1} = AX_n$ soit $X_n = A^n X_0$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

4.5 Complément

4.5.1 Cayley_Hamilton

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ et π_A son polynôme caractéristique noté $\pi_A(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$.

Alors $\pi_A(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I = 0$.

Ce théorème permet d'écrire une puissance de A comme combinaison linéaire des puissances inférieures de A, ou de calculer l'inverse d'une matrice (isoler I dans un membre de l'égalité, factoriser par A l'autre membre, diviser par A des deux côtés).

6.2 Système d'équations différentielles

Définition 58 *On appelle* ***système d'équations différentielles linéaires du premier ordre*** *un système de la forme $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$ avec $A(t) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et $g(t) \in \mathbb{R}^n$.*

Définition 59 *Une* ***équation différentielle d'ordre*** *n se met sous la forme d'un système de n équations du premier ordre. En effet, soit l'équation :*

$$z^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}(t)z^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_0(t)z(t) = f(t)$$

On pose $x_1(t) = z(t)$, $x_2(t) = z'(t)$,..., $x_n(t) = z^{(n-1)}(t)$, alors l'équation se récrit $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$ où

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}, g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0(t) & -\alpha_1(t) & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

6.3 Existence et unicité des solutions des systèmes différentiels

6.3.1 Système homogène

Proposition 45 *Soient $t_0 \in I$ et $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, alors il existe un unique $x \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^n$ tel que $x'(t) = A(t)x(t), x(t_0) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.*

Proposition 46
$S_0 = \{x \in ((C)^1(I, \mathbb{R}))^n | x'(t) = A(t)x(t)\}$ est un sous-espace vectoriel de $((C)^1(I, \mathbb{R}))^n$ de dimension n.

Toute solution de $x'(t) = A(t)x(t)$ peut donc s'écrire sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ où les X_i sont n solutions linéairement indépendantes de $x'(t) = A(t)x(t)$.

6.3.2 Systèmes avec second membre

Proposition 47 *Soit $g \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}))^n$. La solution générale de l'équation $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$ s'écrit $x = x_p + x_h$ avec x_p solution particulière de l'équation inhomogène et x_h solution générale de l'équation homogène.*

6.4 Systèmes à coefficients constants

Lorsque les coefficients de A ne dépendent pas de t, le système est dit à coefficients constants.

6.4.1 Matrice diagonalisable

Si la matrice A (à coefficients constants) est diagonalisable, alors toute solution de $x'(t) = A(t)x(t)$ s'écrit sous la forme

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} Y_i$$

où $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont les valeurs propres de A et $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ une base de vecteurs propres correspondants.

6.4.2 Matrice non diagonalisable

Rappel : Toute matrice est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.
Si A n'est pas diagonalisable, on écrit :

$$x'(t) = Ax(t) \Longleftrightarrow x'(t) = PTP^{-1}x(t) \Longleftrightarrow z'(t) = Tz(t)$$

où $z(t) = P^{-1}x(t)$. On a donc

$$\begin{cases} z_1'(t) = \lambda_1 z_1(t) & t_{12}z_2(t) + \ldots + & t_{1n}z_n(t) \\ z_2'(t) = & \lambda_2 z_2(t) + \ldots + & t_{2n}z_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n'(t) = & & \lambda_n z_n(t) \end{cases}$$

avec sur la diagonale de T les valeurs propres de A. On peut alors résoudre ce système en commençant par la dernière équation, puis on remplace z_n par sa valeur dans l'équation précédente que l'on peut alors résoudre. . .

6.4.3 Systèmes non homogènes à coefficients constants

On veut résoudre $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$. On suppose que $\hat{A}$(diagonalisable ou trigonalisable) est semblable à A, d'où $x'(t) = P\hat{A}P^{-1}x(t) + g(t) \Longleftrightarrow P^{-1}x'(t) = \hat{A}P^{-1}x(t) + P^{-1}g(t) \Longleftrightarrow z'(t) = \hat{A}z(t) + \hat{g}(t)$

6.5 Second ordre

Une équation différentielle du second ordre s'écrit sous la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Elle se résoud en calculant les racines du trinôme caractéristique $as^2 + bs + c$. Deux cas peuvent se présenter :
- Si les racines sont distinctes, on les appelle λ_1 et λ_2 et on a alors $y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$,
- Si les deux racines sont confondues (donc réelles), appellons λ cette racine double alors on a : $y(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t)e^{\lambda t}$.

Dans le cas de racines complexes, elles sont conjuguées. Si on cherche une solution **réelle**, on choisira donc α_1 et α_2 conjugués.

6.6 Coefficients non constants

Passe à l'exo suivant. Si il te reste plus que ça, suicide toi ;-)

6.7 Formules magiques

$$y'(t) - ay(t) = 0 \Rightarrow y(t) = Ce^{at}$$

Variation de la constante :

$$y'(t) - ay(t) = f(t) \Rightarrow y(t) = \left(\int e^{-at} f(t) \,\mathrm{d}t + C \right) e^{at}$$