1 Espaces vectoriels

1.1 Généralités

1.1.1 Groupe

Définition 1 *On appelle* **groupe** *un ensemble G muni d'une* **loi de composition interne** *(c'est à dire d'une application de $G\times G$ dans G), notée par exemple $(x,y)\to(x\hat{+}y)$, qui possède les propriétés suivantes :*

(i) elle est **associative** *: $\forall x,y,z\in G$ on a $(x\hat{+}y)\hat{+}z=x\hat{+}(y\hat{+}z)$,*

(ii) elle admet un élément neutre : $\exists e\in G$ tel que, $\forall x\in G$ on a $e\hat{+}x=x\hat{+}e=x$,

(iii) tout élément admet un **symétrique** *(ou* **opposé** *ou* **inverse** *qui est nécessairement unique) : $\forall x\in G,\exists\bar{x}\in G$ tel que $\bar{x}\hat{+}x=x\hat{+}\bar{x}=e$.*

Un groupe est **commutatif** *si la loi de composition est commutative.*

1.1.2 Espaces vectoriels

Définition 2 *Soit $\mathbb{K}$ un corps (ses éléments sont des scalaires) commutatif. On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ un ensemble E sur lequel on a défini deux lois de composition :*

- *une loi interne $\hat{+}$ telle que $(E,\hat{+})$ soit un* **groupe commutatif**
- *une loi externe définie de $\mathbb{K}\times E$ dans E qui possède les propriétés suivantes : $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\forall\vec{x},\vec{y}\in E$:*
  - $(\lambda\mu).\vec{x}=\lambda.(\mu.\vec{x})$
  - $(\lambda+\mu).\vec{x}=\lambda.\vec{x}\hat{+}\mu.\vec{x}$
  - $\lambda.(\vec{x}\hat{+}\vec{y})=\lambda.\vec{x}\hat{+}\lambda.\vec{y}$
  - $1.\vec{x}=\vec{x}$ *(1 élément unité de K)*

Définition 3 *Soit F une partie* **non vide** *de E. F est un* **sous- espace vectoriel** *de E si et seulement si :*

- $F\neq\emptyset$,
- $\vec{x},\vec{y}\in F\Rightarrow\vec{x}\hat{+}\vec{y}\in F$,
- $\lambda\in\mathbb{K},\vec{x}\in F\Rightarrow\lambda.\vec{x}\in F$.

Proposition 1 *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F\cap G$ est un sous espace vectoriel et $F\cup G$ n'en est en général pas un.*

Définition 4

- *On appelle* **somme** *de deux sous-espaces vectoriels F et G (d'un espace vectoriel E) le sous-espace vectoriel H de E noté $F+G$ tel que $H=\{\vec{x}\in E|\vec{x}=\vec{y}+\vec{z},\vec{y}\in F,\vec{z}\in G\}$.*
- *On dit que F et G sont en* **somme directe** *si $F\cap G=\vec{0}$ et on note alors $H=F\oplus G$.*
- *On dit que F et G sont* **supplémentaires** *dans E si E est la somme directe de F et G.*

Remarque : H est un sous-espace vectoriel de E

Proposition 2 *Si $H=F\oplus G$ alors $\forall\vec{x}\in H$, il existe un couple unique $(\vec{x},\vec{y})\in F\times G$ tel que $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. En particulier si $E=F\oplus G$ alors tout vecteur $\vec{x}\in E$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1.2.1 Familles

Proposition 3

1. *Si deux vecteurs d'une famille $S=\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p\}$ sont égaux (par exemple $\vec{x}_1=\vec{x}_2$) alors la famille S est liée.*
2. *Si l'un des vecteurs de S est le vecteur nul, alors S est liée.*
3. *Toute sur-famille d'une famille liée est liée (Attention : n'ajouter que des vecteurs du même espace).*
4. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*
5. *Soit $\mathcal{L}=\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_p\}$ une famille* **libre** *et $\vec{x}$ un vecteur tel que $\mathcal{L}\cup\{\vec{x}\}$ est liée, alors $\vec{x}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{L}$.*
6. *soit $\mathcal{E}=\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_p\}$ une famille libre et $\vec{x}$ admettant une decomposition de la forme $\vec{x}=\sum_{i=1}^p\lambda_i\vec{x}_i$ alors les coefficients $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ sont uniques.*

Définition 5 *On dit que la famille (finie) $S=\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p\}$ de vecteurs de E est* **génératrice** *de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p$. On dit qu'un espace vectoriel est de* **type fini** *s'il admet une famille génératrice finie.*

Proposition 4 *Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice*

1.2.2 Bases

Définition 6 *Une famille* **libre et génératrice** *est appelée une* **base**.

Proposition 5

- *Une famille $\mathcal{E}=\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur $\vec{x}\in E$ se décompose de manière unique sur $\mathcal{E}$.*
- *$\mathcal{E}$ est une base $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}$ est une famille génératrice minimale $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}$ est une famille libre maximale.*

1.2.3 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 1 *Dans un espace vectoriel de type fini, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

Définition 7 *Soit E un espace vectoriel de type fini différent de $\{\vec{0}\}$, on appelle* **dimension** *de E et on note* **dim**(E) *le nombre d'éléments d'une base quelconque de E. Si $E=\{\vec{0}\}$ sa dimension est nulle par définition (c'est d'ailleurs le seul espace vectoriel de dimension nulle).*

Proposition 6 *Soit E un espace vectoriel de dimension n,*

- *Toute famille libre de n éléments est une base,*
- *Toute famille génératrice de n éléments est une base,*
- *Toute famille de plus de n vecteurs est liée,*
- *Toute famille de moins de n vecteurs ne peut pas être génératrice.*

Proposition 7 *Soit E un espace vectoriel de dimension n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

1. $\dim(F)\leq\dim(E)$,
2. $\{\dim(F)=\dim(E)\}\Longleftrightarrow\{E=F\}$,
3. $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$,
4. $\{E=F\oplus G\}\Longleftrightarrow\{\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)\}$ *et* $\{F\cap G=\{\vec{0}\}\}$.

2 Applications linéaires et matrices

2.1 Application linéaire définition

Définition 8 *Une application linéaire $u:E\to F$ possède les propriétés suivantes :*

- $u(\vec{x}+\vec{y})=u(\vec{x})+u(\vec{y})\qquad\forall\vec{x},\vec{y}\in E$
- $u(\lambda\vec{x})=\lambda u(\vec{x})\qquad\forall\vec{x}\in E,\lambda\in K$

Une application linéaire est donc un espace vectoriel.

2.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 9 *L'image par u du vecteur nul de E est toujours le vecteur nul de F.*

Définition 10 – $\ker u=\{\vec{x}\in E|u(\vec{x})=\vec{0}\}$

- $\operatorname{Im}u=\{u(\vec{x})|\vec{x}\in E\}$

Définition 11 *Soit $u\in\mathcal{L}(E;F)$, alors on a les propriétés suivantes :*

- *L'image par u d'une famille liée de E est une famille liée de F*
- *L'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im}u$*

2.3 Projection

Définition 12 *Soit un espace vectoriel E, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E=F_1\oplus F_2$, on appelle projection ou encore projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 l'application u de E dans E définie par : $u(\vec{x})=\vec{x}_1$ si $\vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2$ où $\vec{x}_1\in F_1,\vec{x}_2\in F_2$*

2.4 Détermination d'une application linéaire

Définition 13 *Soient $\mathcal{E}=\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ une base de E et $u\in\mathcal{L}(E;F)$, alors u est entièrement définie par la famille de vecteurs $u(\vec{e}_j)_{j=1,\ldots,n}$ (cette famille est génératrice de $\operatorname{Im}u$).*

Définition 14 *Soient $u\in\mathcal{L}(E;F),\vec{x}\in E,\mathcal{E}=\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ une base de E, $\mathcal{F}=\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_m$ une base de F. Si on connait les composantes de $\vec{x}$ et des vecteurs $u(\vec{e}_j)$:*

$$\vec{x}=\sum_{j=1}^n x_j\vec{e}_j\quad,\quad u(\vec{e}_j)=\sum_{i=1}^m a_{ij}\vec{f}_i,j=1,\ldots,n$$

Si on a $\vec{y}=u(\vec{x})$ alors

$$\vec{y}=\sum_{i=1}^m y_i\vec{f}_i\text{ avec }y_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j,i=1,\ldots,m$$

2.5 Caractérisation de injective, surjective et bijective

Théorème 2 *Soit $u\in\mathcal{L}(E;F)$, alors on a les trois équivalences :*

- *u est injective*
- $\ker u=\vec{0}$
- *l'image par u de toute famille libre de E est une famille libre de F*

Théorème 3 *Soit $u\in\mathcal{L}(E;F)$, alors on a les trois équivalences :*

- *u est surjective*
- $\operatorname{Im}u=F$
- *l'image par u de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de F*

Théorème 4 *Soit $u\in\mathcal{L}(E;F)$, alors on a les trois équivalences :*

- *u est bijective*
- $\operatorname{Im}u=F$ *et* $\ker u=\vec{0}$
- *l'image par u de toute base de E est une base de F*

2.6 Isomorphismes

Définition 15 – *homomorphisme : appl. lin. de E dans F*

- *endomorphisme : appl. lin. de E dans E*
- *isomorphisme : appl. lin. bijective de E dans F*
- *automorphisme : appl. lin. bijective de E dans E*

Définition 16 *La réciproque ou inverse de $\phi:E\to F$ notée ϕ^{-1} est telle que $\phi^{-1}\circ\phi=i_E$ et $\phi\circ\phi^{-1}=i_F$ Si ϕ^{-1} est définie, ϕ et ϕ^{-1} sont des isomorphismes.*

2.7 Matrices

Définition 17 *Soient E et F deux espaces vectoriels munis des bases $\mathcal{E}=\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ et $\mathcal{F}=\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n$ et $u\in\mathcal{L}(E;F)$. On appelle matrice de u dans les bases de E et de F le tableau A de scalaires à m lignes et n colonnes dont la j^e colonne est composée des composantes de $u(\vec{e}_j)$ dans la base de F. Ainsi pour $j=1,2,\ldots,n$ on peut écrire $u(\vec{e}_j)=\sum_{i=1}^m a_{ij}\vec{f}_i$. On appelle $\mathcal{M}_{mn}$ la matrice à m lignes et n colonnes*

Définition 18 *Si la matrice A est carrée, on a : trace $(A)=\sum_{i=1}^n a_{ii}$*

Définition 19 *A_j représente la j^e colonne de A, $\underline{A_i}$ représente la i^e ligne de A*

2.8 Espace vectoriel des matrices

Définition 20 *Si $A+B=C$ alors $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\quad 1\leq i\leq m,1\leq j\leq n$*

Définition 21 *Si $\lambda A=C$ alors $c_{ij}=\lambda a_{ij}$.*

2.9 Produit de deux matrices

Définition 22 *$A\to u$, $B\to v$ et $C\to w$ alors $C=AB\Rightarrow w=u\circ v$ et $c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\quad i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,p$*

Définition 23 *Si A est une matrice carrée, la matrice inverse de A notée A^{-1} est définie par $AA^{-1}=A^{-1}A=I$. De plus $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$*

2.10 Transposée d'une matrice

Définition 24 *Si $A\in\mathcal{M}_{mn}$, la matrice transposée de A est $A^T\in\mathcal{M}_{nm}$ et $(a^T)_{ij}=a_{ji}$. On a la propriété suivante : $(AB)^T=B^TA^T,(A^T)^T=A,(A+B)^T=A^T+B^T,(\lambda A)^T=\lambda A^T$*

2.11 Changement de base et composantes

Définition 25 *Soit $\mathcal{E}=\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ et $\mathcal{E}'=\vec{e}'_1,\ldots,\vec{e}'_n$ deux bases de E, la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$ est obtenue en mettant en colonnes les composantes de la nouvelle base $\mathcal{E}'$ dans la base $\mathcal{E}$.*

Proposition 8 *Soit $\vec{x}\in E$ et soit $(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)$ et $(\vec{x}'_1,\ldots,\vec{x}'_n)$ les composantes de $\vec{x}$ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, alors on a $X'=PX$ ou encore $X'=PX$ avec $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ et $X'=\begin{pmatrix}x'_1\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}$*

2.12 Changement de base et matrices

Théorème 5 *Soit $u\in\mathcal{L}(E;E)$, A et A' les matrices représentant u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, alors si P est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$, on a la relation $A'=P^{-1}AP$*

2.13 Matrices semblables

Définition 26 *Si il existe P inversible telle que $A'=P^{-1}AP$, A et A' sont dites semblables. Si A et B sont semblables, A^T et B^T sont semblables ,leurs traces sont égales et si B et C sont semblables, A et C sont semblables.*

2.14 Rang

Définition 27 *Soit $u\in\mathcal{L}(E;F)$, on appelle rang de u et on note $\operatorname{Rang}(u)$ la dimension de $\operatorname{Im}(u)$.*

Définition 28 *Soit $A\in\mathcal{M}_{mn}$ alors $\operatorname{Im}A=\{Y\in\mathcal{M}_{m1}$ tel que $Y=AX$, avec $X\in\mathcal{M}_{n1}\}$*

Définition 29 *Soit $A\in\mathcal{M}_{mn}$ alors $\operatorname{Im}(A)$ est le sous espace vectoriel engendré par les colonnes de A*

Proposition 9 – *Si A et A' sont semblables alors elles ont le même rang*

- *A et A^T ont le même rang*

2.15 Rang et dimension du noyau d'une application

Théorème 6 *Soit $u\in\mathcal{L}(E;F)$ alors $\dim[\ker u]+\operatorname{Rang}u=\dim E$*

Proposition 10 *Soit $u\in\mathcal{L}(E;F)$, $\dim(E)=\dim(F)$ alors ces propositions sont équivalentes*

- *u injective*
- *u surjective*
- *u bijective*

2.16 Noyau d'une matrice

Définition 30 *Soit $A\in\mathcal{M}_{mn}$ alors $\ker A=\{X\in\mathcal{M}_{n1},AX=0\}$ De plus $\dim[\ker A]+\dim[\operatorname{Im}A]=n$*

Proposition 11 *Si $A\in\mathcal{M}_{nn}$ alors A inversible $\Longleftrightarrow\ker A=\{0\}\Longleftrightarrow\operatorname{Rang}A=n$*

3 Déterminants

3.1 Définition des déterminants, propriétés et calcul

3.1.1 Définition du déterminant par récurence

Proposition 12 *La définition permet d'obtenir immédiatement la propriété suivante : Si $\bar{A}$ est la matrice dont les termes sont les conjugués de ceux de A ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) alors $\det\bar{A}=\overline{\det A}$.*

3.1.2 Définition d'une famille de vecteur

Si E est une base orthonormée de dimention 2, alors $\det(\vec{x},\vec{y})$ est l'aire (algébrique) du parallélogramme construit sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Le signe est positif si l'angle orienté $(\vec{x},\vec{y})$ est tel que $0\leq(\vec{x},\vec{y})\leq\pi(\bmod 2\pi)$; sinon, il est négatif (si si...).

3.1.3 Le déterminant et les formes multilinéaires

Théorème 7 *Le déterminant est une fonction linéaire de chaque colonne, donc une* **application multi-linéaire** *de l'ensemble des colonnes.*

Proposition 13

- *Si $A\in\mathcal{M}_{n,n},\lambda\in\mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A)=\lambda^n\det A$.*
- *Si une colonne de A est nul alors $\det A=0$.*

3.1.4 Propriétés du déterminant liées aux colonnes adjacentes

Proposition 14 *Soit $A\in\mathcal{M}_{n,n}$, alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Si deux colonnes ou lignes sont égales, le déterminant est nul.*
2. *Si on échange entre elles deux colonnes ou lignes de la matrice, le déterminant change de signe.*

Théorème 8 *Le déterminant d'une matrice ne change pas si à une colonne (resp. lignes) on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).*

3.1.5 Propriétés du déterminant liées aux lignes

Théorème 9 *Soit $A\in\mathcal{M}_{n,n}$, alors $\det A=\det A^T$.*

Théorème 10 *Le déterminant d'une matrice $A\in\mathcal{M}_{n,n}$ vérifie la propriété suivante : le déterminant est une fonction multilinéaire de chacune des lignes,*

Proposition 15 *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.*

3.2 Autres propriétés et utilisations des déterminants

3.2.1 Déterminant d'un produit de matrices

Théorème 11 *Soient $A,B\in\mathcal{M}_{n,n}$, alors $\det(AB)=\det A\,\det B$.*

3.2.2 Déterminant d'une base de vecteurs

Théorème 12 *Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{E}$ de référence, soient $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n\}$, n vecteurs de E alors on a l'équivalence suivante :*

$$\{\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n\}\text{ base de }E\Longleftrightarrow\det(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)\neq0$$

3.2.3 Déterminant et matrice inversible

Théorème 13 *A est inversible $\Longleftrightarrow\det A\neq0$*

Théorème 14 *Si $A\in\mathcal{M}_{n,n}$ est inversible alors $\det A^{-1}=1/(\det A)$.*

Proposition 16 *A est inversible s'il existe une matrice B telle que $BA=I$. La matrice B est alors l'inverse de A*

3.2.4 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 17 *Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.*

Définition 31 *Soit $u\in\mathcal{L}(E,E)$, où E est de dimention finie, on appelle* **déterminant de u** *le déterminant de toutes matrices représentant u dans une base arbitraire.*

3.2.5 Rang d'une matrice

Définition 32 *Soit $A\in\mathcal{M}_{m,n}$, on appelle* **matrice extraite** *de A une matrice obtenue en sélectionnant des lignes et des colonnes de A.*

Théorème 15 *Soit $A\in\mathcal{M}_{m,n}$ alors le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe une matrice carrée inversible $\hat{A}\in\mathcal{M}_{r,r}$ extraite de A.*

Proposition 18 *Soit E un espace vectoriel de dimention n muni d'une base. Soit $\mathcal{X}=(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_r)$ une famille de r vecteur de E avec $r\leq n$. On note X_i le vecteur colonne constitué des composantes de $\vec{x}_i$, $X=(X_1,\ldots,X_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{K})$. Alors la famille $\mathcal{X}$ est libre si et seulement si il existe une matrice carrée $r\times r$ extraite de X qui est inversible.*

Proposition 19 *On a $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A^T)$.*

3.3 Systèmes linéaires

3.3.1 Existence de la solution d'un système de matrice carrée

Théorème 16 *Soit $A\in\mathcal{M}_{n,n}$ le système $Ax=b$ admet une solution si et seulement si $b\in\operatorname{Im}A$*

Théorème 17 *Soit $A\in\mathcal{M}_{n,n},B\in\mathcal{M}_{n,1}$ le système $Ax=b$ admet une solution unique si et seulement si $\det A\neq0$.*

3.3.2 Résolution de $Ax=b$ par la méthode de Cramer

Théorème 18 *Soit $A\in\mathcal{M}_{n,n}$ une matrice, b et $x\in\mathcal{M}_{n,1}$ tels que $Ax=b$. Alors pour tout $j=1,\ldots,n$, on a la* **formule de Cramer** *:*

$$\det(A_1,\ldots,A_{i-1},b,A_{i+1},\ldots,A_n)=x_i\det A$$

Proposition 20 *Si $A\in\mathcal{M}_{n,n}$ et $\det A\neq0$, on obtient la solution de $Ax=b$ par la formule de Cramer :*

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\det A}$$

avec $\Delta_i=\det(A_1,\ldots,A_{i-1},b,A_{i+1},\ldots,A_n)$

3.3.3 Existence des solutions d'un système linéaire inhomogène

Proposition 21 *Si $A\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est une matrice de rang r, si les r premières colonnes de A forment une famille libre, alors $Ax=b$ a une solution si et seulement si b appartient au sous-espace engendré par les r premières colonnes de A.*

3.3.4 Calcul pratique de l'inverse d'une matrisse

Si $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ alors :

$$\begin{cases}x_1&+x_2&+x_3&=y_1\\x_1&+x_2&&=y_2\\&+x_2&+x_3&=y_3\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1=&y_1&&-y_3\\x_2=&-y_1&+y_2&+y_3\\x_3=&y_1&-y_2&\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

3.3.5 Calcul théorique de l'inverse de A

Définition 33 *On appelle* **co-matrice** *de A et on note $co(A)$ la matrice des cofacteur de A :*

$$co(A)_{ij}=cof(-1)^{i+j}\det A_{|i,j|}$$

Théorème 19

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}(co(A))^T$$

Tip technique : Si $A\in\mathcal{M}_{22}$, le calcul est direct :

$$P^{-1}=\frac{1}{\det P}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\text{ avec }P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

4 Valeurs propres — Vecteurs propres

4.1 Vecteurs propres — Valeurs propres

4.1.1 Valeur et vecteur propres d'un endomorphisme

Définition 34 *On dit que $\lambda\in\mathbb{K}$ est une* **valeur propre** *de u s'il existe un vecteur $\vec{y}\in E$ non nul tel que $u(\vec{y})=\lambda\vec{y}$ et $\vec{y}$ est appelé un* **vecteur propre** *de u associé à la valeur propre λ.*

4.1.2 Valeur et vecteur propres d'une matrice

Définition 35 *On dit que $\lambda\in\mathbb{K}$ est une* **valeur propre** *de $A\in\mathcal{M}_{n,n}$ s'il existe un vecteur $Y\in\mathcal{M}_{n,1},Y\neq0$ tel que $AY=\lambda Y$. Dans ce cas on dit que Y est un* **vecteur propre** *associé à la valeur propre λ et que (λ,Y) est un couple propre de A.*

- Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses termes diagonaux.
- A non inversible $\Longleftrightarrow0$ est valeur propre de A.

4.1.3 Polynôme caractéristique

Définition 36 *On appelle* **polynôme caractéristique** *de A le polynôme $\Pi_A(s)=\det(sI-A)$.*

Le polynôme caractéristique de A est de degré n et plus précisement il est de la forme $\pi_A(s)=s^n+\alpha_1s^{n-2}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n$.

Proposition 22 *Une condition nécéssaire et suffisante pour que λ soit valeur propre de A est que $\lambda\in\mathbb{K}$ et qu'elle soit racine du polynôme caractéristique, c'est-à-dire $\det(\lambda I-A)=0$.*

Définition 37 *On appelle* **multiplicité** *de la valeur propre λ_i la multiplicité de la racine correspondante du polynôme caractéristique.*

4.1.4 Valeur propres et matrices particulière

Proposition 23 *Si $A\in\mathcal{M}_{n,n}$ est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux.*

Proposition 24 *Si $A\in\mathcal{M}_{n,n}$, alors A et A^T ont les mêmes polynômes caractéristiques et donc les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.*

4.1.5 Valeurs propres et matrice semblables

Proposition 25 *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique et en particulier les mêmes valeurs propres.*

4.2 Matrices à coefficients complexes

Proposition 26 *Si A est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ qui admet p valeurs propres complexes distinctes notées $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$, si on note r_i la multiplicité de λ_i alors $\sum_{i=1}^p r_i=n$*

Proposition 27 *Soit $A\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et soient $\{\mu_1,\ldots,\mu_n\}$ ses valeurs propres complexes (distinctes ou confondues), alors*

- *la trace de A est égale à la somme de ses valeurs propres.*
- *le déterminant de A est égal au produit de ses valeurs propres.*

4.3 Sous-espace propre

Définition 38 *Soit λ une valeur propre de A, on appelle* **sous-espace propre** *associé à λ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}$, noté V_λ, défini par $V_\lambda=\{Y\in\mathcal{M}_{n1}|AY=\lambda Y\}$.*

Proposition 28 *Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ p valeurs propres distinctes d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{nn}$ et soient $\{Y_1,\ldots,Y_p\}$ p vecteurs propres associés, alors la famille $\{Y_1,\ldots,Y_p\}$ est libre.*

Proposition 29 *Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.*

Proposition 30 *Soit r_i la multiplicité de λ_i et d_i la dimension de V_{λ_i}, alors $d_i\leq r_i$.*

4.4 Réduction d'une matrice

4.4.1 Diagonalisation

Définition 39 *$A \in \mathcal{M}_{nn}$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ s'il existe $D \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.*

Remarque : A et D ont les mêmes valeurs propres, ce sont les éléments de la diagonale de D. De plus, les colonnes de P sont les vecteurs propres correspondants.

Proposition 31 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
- *A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$*
- *A admet une base de vecteurs propres dans $\mathbb{K}$ (base de $\mathcal{M}_{n1}$)*
- *A admet p valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ vérifiant*

$$\sum_i^p r_i = n \text{ et } d_i = r_i \forall i \in [1,p]$$

- *A admet p valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ vérifiant*

$$\sum_i^p d_i = n$$

Proposition 32 *A admet n valeurs propres dans K toutes distinctes $\Rightarrow$ A diagonalisable (condition **non nécessaire**).*

4.4.2 Applications

Calcul de la puissance d'une matrice : Si $A = PDP^{-1}$ alors $A^k = PD^kP^{-1}$

Système de suites récurrentes : Soient u_n et v_n deux suite réelles telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = a_{11}u_n + a_{12}v_n, n \in \mathbb{N} \\ v_{n+1} = a_{21}u_n + a_{22}v_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Le système précédent s'écrit alors $X_{n+1} = AX_n$ soit $X_n = A^nX_0$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

4.5 Complément

4.5.1 Cayley_Hamilton

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ et π_A son polynôme caractéristique noté $\pi_A(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$.

Alors $\pi_A(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I = 0$.

Ce théorème permet d'écrire une puissance de A comme combinaison linéaire des puissances inférieures de A, ou de calculer l'inverse d'une matrice (isoler I dans un membre de l'égalité, factoriser par A l'autre membre, diviser par A des deux côtés).

5 Espaces euclidiens

5.1 Produit scalaire, norme, espace euclidien

5.1.1 Définition du produit scalaire

Définition 40 *On appelle **produit scalaire** dans un espace vectoriel réel E, une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ notée $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \langle \vec{x},\vec{y}\rangle$ possédant les propriétés suivantes :*
1. *Elle est bilinéaire :*
   - $\langle \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2, \vec{y}\rangle = \alpha_1\langle \vec{x}_1,\vec{y}\rangle + \alpha_2\langle \vec{x}_2,\vec{y}\rangle$
   - *Pareil sur y*
2. *elle est définie positive :*
   - $\forall \vec{x} \in E, \langle \vec{x},\vec{x}\rangle \geq 0$
   - $\langle \vec{x},\vec{x}\rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$
3. *elle est symétrique : $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \langle \vec{y},\vec{x}\rangle$*

5.1.2 Produit scalaire et transposition

Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = X^TY = Y^TX = \sum_{i=1}^n x_iy_i$$

Proposition 33 *Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ alors $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ vérifie :*
$\langle Ax,y\rangle = \langle x, A^Ty\rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$
(le produit scalaire de gauche est dans $\mathbb{R}^m$ et l'autre dans $\mathbb{R}^n$.)

5.1.3 Inégalité de Cauchy – Schwartz

Proposition 34 (Inégalité de Cauchy – Schwartz) *On a $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle^2 \leq \langle \vec{x},\vec{x}\rangle\langle \vec{y},\vec{y}\rangle$ avec égalité ssi $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires.*
L'inégalité peut aussi s'écrire $|\langle \vec{x},\vec{y}\rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{x},\vec{x}\rangle}\sqrt{\langle \vec{y},\vec{y}\rangle}$

5.1.4 Définition de la norme

Définition 41 *On appelle **norme** sur un espace vectoriel réel E, une application de E dans $\mathbb{R}^+$ notée $\vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|$ possédant les propriétés suivantes :*
1. *$\|\vec{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;*
2. *$\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\,\|\vec{x}\|\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$*
3. *$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (inégalité triangulaire).*

Définition 42 *On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel réel muni d'une norme.*

5.1.5 Définition de l'espace euclidien

Proposition 35 *Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, alors l'application $\vec{x} \mapsto \sqrt{\langle \vec{x},\vec{x}\rangle}$ définit une norme sur E.*

Définition 43 *Un **espace euclidien** est un espace vectoriel normé de dimension finie, dont la norme est issue d'un produit scalaire.*

Attention : à un produit scalaire, on peut associer une norme **mais la réciproque est fausse !**

5.2 Orthogonalité

5.2.1 Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux

Définition 44 *Soit un espace euclidien E.*
1. *Deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont **orthogonaux** si $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = 0$.*
2. *Une famille de vecteur $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ est **orthogonale** si $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j\rangle = 0, \forall i \neq j$. Elle est **orthonormée** ou **orthonormale** si de plus $\|x_i\| = 1, \forall i = 1,\ldots,p$.*
3. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle **orthonormal de** F dans E et on note $F^\perp$, le sous-espace vectoriel $F^\perp = \{\vec{x} \in E | \forall \vec{y} \in F, \langle \vec{x},\vec{y}\rangle = 0\}$.*

Proposition 36 *Une famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace euclidien est libre.*

5.2.2 Procédé d'orthogonalisation de Schmidt

Proposition 37 (Orthogonalisation de Schmidt) *Soit $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ une famille libre de E, alors il existe une famille orthonormée $\mathcal{Y} = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_p\}$ telle que : $vect\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\rangle = vect\langle \vec{y}_1, \vec{y}_p\rangle, \forall k = 1,\ldots,p$. Dans la pratique, on calcule les vecteurs $\vec{y}_i$ de la façon suivante : $\vec{\tilde{y}}_i = \vec{x}_i + \sum_{k=1}^n \beta_k\vec{y}_k$ avec $\beta_k = -\langle \vec{x}_i, \vec{y}_k\rangle$. Ensuite, $\vec{y}_i = \frac{\vec{\tilde{y}}_i}{\|\vec{\tilde{y}}_i\|}$.*

5.2.3 Décomposition d'un espace euclidien en sous-espaces orthogonaux

Théorème 20 *Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E, alors $E = F \oplus F^\perp$.*

5.2.4 Définition et caractérisation des matrices orthogonales

Définition 45 *On dit que $Q \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si pour tout $1 \leq i,j \leq n, (Q_i)^TQ_j = \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.*

Proposition 38 *Une matrice est orthogonale $\Longleftrightarrow Q^{-1} = Q^T$. De plus le déterminant d'une matrice orthogonal est égale à ± 1*

5.2.5 Matrice de passage entre 2 bases orthonormées

Proposition 39 *Soit $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{\vec{b}'_1, \ldots, \vec{b}'_n\}$, deux bases orthonormées d'un même espace euclidien E, alors la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale.*

5.2.6 Propriété des matrices orthogonales

Proposition 40 *Les matrices orthogonales ont les deux propriétés importantes suivantes :*
- *la transposée (donc aussi l'inverse) d'une matrice orthogonale est orthogonale ;*
- *un produit de matrices orthogonales est orthogonal.*

Proposition 41 ***Lien entre matrice orthogonale, norme et produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$***
- *Une matrice Q orthogonale conserve la norme des vecteurs ($\|x\| = \|Qx\|$ avec $\|.\|$ norme usuelle).*
- *Une matrice orthogonale conserve le produit scalaire ($\langle x,y\rangle = \langle Qx,Qy\rangle$).*

5.3 Diagonalisation des matrices symétriques

Théorème 21 *Soit $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, alors :*
- *A a toutes ses valeurs propres réelles*
- *il existe une base orthonormée de vecteurs propres de A*
- *A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et il existe une matrice P orthogonale telle que $D = P^TAP$ soit une matrice diagonale.*

5.4 Formes quadratiques

5.4.1 Matrice définie positive

Définition 46 *On dit qu'une matrice est semi-définie positive si $x^TAx \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. On dit qu'elle est définie positive si de plus $x^TAx = 0 \Rightarrow x = 0$.*

Proposition 42
- *A définie positive $\Rightarrow a_{ii} > 0\ \forall i$*
- *A semi-définie positive $\Rightarrow a_{ii} \geq 0\ \forall i$*

Proposition 43 *Une matrice symétrique définie positive est inversible.*

5.4.2 Définition d'une forme quadratique

Définition 47 *On appelle forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, un polynôme homogène de degré 2 en les variables ($x_1, \ldots, x_n$), c'est à dire une expression de la forme :*

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij}x_ix_j$$

Proposition 44 *Une condition nécessaire et suffisante pour que q soit une forme quadratique est qu'il existe une matrice symétrique A appartenant à $M_{nn}(\mathbb{R})$ telle que $q(x) = x^TAx$, cette matrice étant unique.*

De plus A se retrouve par $a_{ii} = \alpha_i$ et $a_{ij} = a_{ji} = \beta_{ij}$.

5.4.3 Forme quadratique définie positive

Définition 48 *On dit que la forme quadratique $q(x) = x^TAx$ est*
- *définie positive si la matrice A est définie positive,*
- *semi-définie positive si la matrice A est semi-définie positive.*

5.4.4 Réduction de Gauss d'une forme quadratique

Définition 49 *Premiere méthode (il y a des termes aux carrés dans votre forme quadratique) : On regroupe tous les termes faisant intervenir une même variable dans un polynôme q^* et on factorise, par ex pour x_1 : $q^*(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ donnera $q^*(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2$ puis on recommence avec chacune des variables pour obtenir seulement une addition de termes au carré.*

Définition 50 *Deuxieme méthode (il n'y a pas de termes aux carrés dans votre forme quadratique) : On regroupe tous les termes faisant intervenir deux même variables dans un polynôme q^* et on factorise, par ex pour x_1 et x_2 : $q^*(x) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4$ donnera $q^*(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4)^2 - (x_1 - x_2 + 3x_4)^2 - 4(x_3 + x_4)(x_3 - 2x_4)$*

On peut être amené à utiliser l'identité :
$ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2)$

On recommence la réduction avec la premiere méthode si des termes au carré apparaissent sinon on continue avec cette méthode et on recommence avec chacune des variables pour obtenir seulement une addition de termes au carré.

5.5 Espace hermitien

5.5.1 Forme sesquilinéaire

Définition 51 *On appelle **forme sesquilinéaire** sur $E \times E$, une application ϕ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :*
- *Elle est linéaire par rapport à son premier argument*

$$\phi(\lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{x}_2, \vec{y}) = \lambda\phi(\vec{x}_1,\vec{y}) + \mu\phi(\vec{x}_2 + \vec{y})\forall\lambda,\mu, \in \mathbb{C}$$

- *Elle est **anti-linéaire** par rapport à son deuxième argument*

$$\phi(\vec{x}, \lambda\vec{y}_1 + \mu\vec{y}_2) = \bar{\lambda}\phi(\vec{x},\vec{y}_1) + \bar{\mu}\phi(\vec{x},\vec{y}_2)\forall\lambda,\mu, \in \mathbb{C}$$

5.5.2 Produit hermitien, espace hermitien, matrice hermitienne

Définition 52 *On appelle **forme sesquilinéaire hermitienne** sur E une forme sesquilinéaire $(\vec{x},\vec{y}) \to \phi(\vec{x},\vec{y})$ de $\underline{E \times E}$ dans $\mathbb{C}$ possédant la propriété suivante : $\phi(\vec{y},\vec{x}) = \overline{\phi(\vec{x},\vec{y})}$, c'est l'analogue de la forme bilinéaire symétrique.*

Définition 53 *On appelle produit hermitien sur E, une forme sesquilinéaire ϕ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, hermitienne et définie positive, c'est à dire : $\phi(\vec{x},\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ en effet $\phi(\vec{x},\vec{x}) \in \mathbb{R}$*

Définition 54 *Un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie muni d'un produit hermitien est appelé espace hermitien.*

Définition 55 *Soit $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$, on appelle adjointe de A et on note A^* la matrice $A^* = \bar{A}^T$. On dit que A est une matrice hermitienne si $A^* = A$*

5.5.3 Orthogonalité dans les espaces hermitiens

Définition 56 *Si E est un espace hermitien, on dit que 2 vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux si leur produit hermitien est nul. $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = 0$.*

Définition 57 *On dit que la matrice $H \in M_{nn}(\mathbb{C})$ est unitaire si $H^*H = I$.*

Théorème 22 *Une matrice hermitienne a toutes ses valeurs propres réelles et est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. La matrice de changement de base qui intervient alors est unitaire.*

6 Équations différentielles

6.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $I \times \mathbb{R}$, alors si f vérifie la **condition de Lipschitz** suivante :

Il existe une constante $L > 0$ telle que $\forall t \in I, x, z \in \mathbb{R}, |f(t,x) - f(t,z)| \leq L|x - z|$,

alors le système

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admet une solution unique pour tout $t \in I \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

6.2 Système d'équations différentielles

Définition 58 *On appelle **système d'équations différentielles linéaires du premier ordre** un système de la forme $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$ avec $A(t) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et $g(t) \in \mathbb{R}^n$.*

Définition 59 *Une **équation différentielle d'ordre** n se met sous la forme d'un système de n équations du premier ordre. En effet, soit l'équation :*

$$z^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}(t)z^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_0(t)z(t) = f(t)$$

On pose $x_1(t) = z(t)$, $x_2(t) = z'(t)$,..., $x_n(t) = z^{(n-1)}(t)$, alors l'équation se récrit $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$ où

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}, g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0(t) & -\alpha_1(t) & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

6.3 Existence et unicité des solutions des systèmes différentiels

6.3.1 Système homogène

Proposition 45 *Soient $t_0 \in I$ et $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, alors il existe un unique $x \in (\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}))^n$ tel que $x'(t) = A(t)x(t), x(t_0) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.*

Proposition 46
$S_0 = \{x \in ((C)^1(I,\mathbb{R}))^n | x'(t) = A(t)x(t)\}$ est un sous-espace vectoriel de $((C)^1(I,\mathbb{R}))^n$ de dimension n.

Toute solution de $x'(t) = A(t)x(t)$ peut donc s'écrire sous la forme $x = \sum_{i=1}^n \alpha_iX_i$ où les X_i sont n solutions linéairement indépendantes de $x'(t) = A(t)x(t)$.

6.3.2 Systèmes avec second membre

Proposition 47 *Soit $g \in (\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}))^n$. La solution générale de l'équation $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$ s'écrit $x = x_p + x_h$ avec x_p solution particulière de l'équation inhomogène et x_h solution générale de l'équation homogène.*

6.4 Systèmes à coefficients constants

Lorsque les coefficients de A ne dépendent pas de t, le système est dit à coefficients constants.

6.4.1 Matrice diagonalisable

Si la matrice A (à coefficients constants) est diagonalisable, alors toute solution de $x'(t) = A(t)x(t)$ s'écrit sous la forme

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t}Y_i$$

où $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont les valeurs propres de A et $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ une base de vecteurs propres correspondants.

6.4.2 Matrice non diagonalisable

Rappel : Toute matrice est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.
Si A n'est pas diagonalisable, on écrit :

$$x'(t) = Ax(t) \Longleftrightarrow x'(t) = PTP^{-1}x(t) \Longleftrightarrow z'(t) = Tz(t)$$

où $z(t) = P^{-1}x(t)$. On a donc

$$\begin{cases} z_1'(t) = \lambda_1 z_1(t) & t_{12}z_2(t) + \ldots + & t_{1n}z_n(t) \\ z_2'(t) = & \lambda_2 z_2(t) + \ldots + & t_{2n}z_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n'(t) = & & \lambda_n z_n(t) \end{cases}$$

avec sur la diagonale de T les valeurs propres de A. On peut alors résoudre ce système en commençant par la dernière équation, puis on remplace z_n par sa valeur dans l'équation précédente que l'on peut alors résoudre...

6.4.3 Systèmes non homogènes à coefficients constants

On veut résoudre $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$. On suppose que $\hat{A}$(diagonalisable ou trigonalisable) est semblable à A, d'où $x'(t) = P\hat{A}P^{-1}x(t) + g(t) \Longleftrightarrow P^{-1}x'(t) = \hat{A}P^{-1}x(t) + P^{-1}g(t) \Longleftrightarrow z'(t) = \hat{A}z(t) + \hat{g}(t)$

6.5 Second ordre

Une équation différentielle du second ordre s'écrit sous la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Elle se résoud en calculant les racines du trinôme caractéristique $as^2 + bs + c$. Deux cas peuvent se présenter :
- Si les racines sont distinctes, on les appelle λ_1 et λ_2 et on a alors $y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$,
- Si les deux racines sont confondues (donc réelles), appellons λ cette racine double alors on a : $y(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t)e^{\lambda t}$.

Dans le cas de racines complexes, elles sont conjuguées. Si on cherche une solution **réelle**, on choisira donc α_1 et α_2 conjugués.

6.6 Coefficients non constants

Passe à l'exo suivant. Si il te reste plus que ça, suicide toi ;-)

6.7 Formules magiques

$$y'(t) - ay(t) = 0 \Rightarrow y(t) = Ce^{at}$$

Variation de la constante :

$$y'(t) - ay(t) = f(t) \Rightarrow y(t) = \left(\int e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t + C\right)e^{at}$$