2.7 Champ dérivant d'un potentiel scalaire

$\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire si $\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \vec{0}$, c'est-à-dire si $\exists f$ tel que $\overrightarrow{grad}\,f = \vec{V}$

2.8 Champ dérivant d'un potentiel vecteur

$\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur si $div\,\vec{V} = 0$, c'est-à-dire si $\exists \vec{A}$ tel que $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{V}$ ($\vec{A}$ deux fois continument dérivable)

3 Courbes et surfaces

3.1 Coniques

Ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ asymptote aux droites $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

3.2 Etude de courbes paramétrées

si $x(t) \to \infty$ et $y(t) \to \infty$ alors

- si $\frac{y(t)}{x(t)} \to \infty$ alors branche asymptotique de direction Oy ;
- si $\frac{y(t)}{x(t)} \to 0$ alors branche asymptotique de direction Ox ;
- si $\frac{y(t)}{x(t)} \to a$ alors
  - si $y(t) - a\,x(t) \to \infty$ alors branche asymptotique de direction $y = a\,x$;
  - si $y(t) - a\,x(t) \to b$ alors asympote à $y = a\,x + b$[1].

3.3 Courbes polaires

Tangente : $\overrightarrow{T_0} = r'(\theta_0)\overrightarrow{u_0} + r(\theta_0)\overrightarrow{v_0}$

$$\left.\begin{array}{l}\theta \to \theta_0 \\ r \to \infty\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ asymptote : } y = x\,\tan\theta_0 + \frac{l}{\cos\theta_0}$$

avec $l = \lim_{\theta \to \theta_0} r(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$

Position de la courbe par rapport à l'asymptote : signe de $r(\theta)\sin(\theta - \theta_0) - l$.

3.4 Plan tangent à une surface

Théorème 2 (Surface paramétrée) *Si la surface $\mathcal{S}$ est différentiable en M_0, si les vecteurs*

$$T_1(M_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial b}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial c}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix},\ T_2(M_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial b}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial c}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix},$$

ne sont pas colinéaire, il existe un plan Π tangent à $\mathcal{S}$ en M_0.

Si les composantes de $\vec{N} = T_1 \wedge T_2$ sont (α, β, γ), l'équation de Π est :

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$$

Théorème 3 (Équation implicite) *La surface $\mathcal{S}$ est caractérisée par $f(x, y, z) = 0$. On note*

$$\vec{N_0} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(x_0, y_0, z_0)$$

alors l'équation du plan tangent est :

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = 0$$

4 Intégrale double

4.1 Fubini

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\,dx\right) dy$$

4.2 Changement de variables

Théorème 4 (Changement de variables) *Soient Δ, D deux ouverts bornés quarrables de $\mathbb{R}^2$, $\Phi : \Delta \to D$ est un changement de variable de Δ sur D. On suppose que la fonction $(u, v) \mapsto J_\Phi(u, v)$ reste bornée sur Δ. Supposons que $f : D \to \mathbb{R}$ une application continue sur $D = \Phi(\Delta)$, alors la fonction $(u, v) \mapsto f \circ \Phi(u, v)$ est integrable sur Δ et on a :*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_\Delta f(\alpha(u, v), \beta(u, v))|J_\Phi(u, v)|dudv$$

avec :

$$\begin{aligned} J_\Phi(u, v) &= \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, v)\frac{\partial \beta}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial \alpha}{\partial v}(u, v)\frac{\partial \beta}{\partial u}(u, v) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial v} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

5 Intégrale triple

5.1 Méthode des bâtonnets (Fubini)

Par le même raisonnement qu'en intégrale double :

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \iint_A \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right) dxdy$$

5.2 Méthode des tranches

Pour un volume borné en a et en b sur z, on a :

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z)dxdy\right) dz$$

Ce qui revient à dire, en parlant en aire et en volume :

$$\mathcal{V}(D) = \int_a^b \mathcal{A}(D_z)dz$$

[1] attention : étude du signe de $y(t) - a\,x(t) - b$

5.3 Changement de variables

Théorème 5 (Changement de variables) *Soient Δ, D deux ensembles bornés et cubables de $\mathbb{R}^3$, $\Phi : \Delta \to D$ est un changement de variable de Δ sur D. On suppose que la fonction $(u, v, w) \mapsto J_\Phi(u, v, w)$ reste bornée sur Δ. Supposons que $f : D \to \mathbb{R}$ une application continue sur $D = \Phi(\Delta)$, alors la fonction $(u, v, w) \mapsto f \circ \Phi(u, v, w)$ est integrable sur Δ et on a :*

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \iiint_\Delta f(\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w))\,|J_\Phi(u, v, w)|dudvdw$$

avec :

$$J_\Phi(u, v, w) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial w}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial \alpha}{\partial w} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial \beta}{\partial w} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u} & \frac{\partial \gamma}{\partial v} & \frac{\partial \gamma}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Pour le passage aux coordonnées cylindriques :

$$J_\Phi(r, \theta, z) = r$$

Pour le passage aux coordonnées sphériques :

$$J_\Phi(r, \theta, \phi) = r^2 \cos\phi$$

Théorème 6 (Guldin) *Pour un solide $\mathcal{S}$ de révolution engendré par la rotation de la plaque D autour le l'axe (Oz) alors on a :*

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}) = 2\pi x_G \mathcal{A}(D)$$

6 Intégrale curviligne — Théorème de Green-Riemann

6.1 Abscisse curviligne

6.1.1 Abscisse curviligne — définition

$$s(t) = \varepsilon \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}u$$

$$\widetilde{M_1M_2} = \left\|\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}u\right\|$$

En polaire :

$$\widetilde{M_1M_2} = \left\|\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\rho^2(u) + \rho'^2(u)}\,\mathrm{d}u\right\|$$

6.1.2 Calcul de masse d'un fil

Théorème 7 (masse d'un fil) *Soit $\mathcal{C}$ une courbe d'extrémité A et B paramétrée par $(x(t), y(t), z(t))$, on suppose que x, y, z sont dérivable. On note $\tilde{u}(t)$ la masse linéique, alors la masse m de $\mathcal{C}$ vaut :*

$$m = \left\|\int_{t_A}^{t_B} \tilde{u}(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t\right\|$$

6.1.3 Vecteur tangent unitaire

Proposition 1 *Soit $\mathcal{C}$ une courbe munie d'une abscisse curviligne s (donc d'une orientation), on note $x^*(s), y^*(s), z^*(s)$ les coordonnées des points de $\mathcal{C}$ en fonction de s ($x^*(s(t)) = x(t), \ldots$), alors*

$$\vec{t^*} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$$

est le vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en $M(s)$, unitaire et dirigé dans le sens de $\mathcal{C}$.

6.2 Circulation d'un champ de vecteur

6.2.1 Travail d'un champ de force

$$\begin{aligned} W_{\widetilde{AB}}(\vec{F}) = \int_{S_A}^{S_B} \Big(& P\left(x^*(s), y^*(s), z^*(s)\right)\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}s} + \\ & Q\left(x^*(s), y^*(t), z^*(t)\right)\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}s} + \\ & R\left(x^*(s), y^*(t), z^*(t)\right)\frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}s}\Big)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

6.2.2 Circulation d'un champ de vecteur

Comme pour le travail d'un champ de force ou :

$$\begin{aligned} W_{\widetilde{AB}}(\vec{F}) = \int_{t_A}^{t_b} & \left(P\left(x(t), y(t), z(t)\right)x'(t) + \right. \\ & Q\left(x(t), y(t), z(t)\right)y'(t) + \\ & \left. R\left(x(t), y(t), z(t)\right)z'(t)\right)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

6.2.3 Champ de vecteur dérivant d'un potentiel

Stokes 0 :

$$f(B) - f(A) = \oint_\gamma \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

6.3 Théorème de Green-Riemann

Théorème 8 *Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ limitée par une courbe* fermée, sans point double, parcourue dans le sens direct, *notée Γ. Soient deux fonctions P et Q qui admettent des dérivées partielles premières continues sur D, alors on a :*

$$\oint_\Gamma (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \iint_\mathcal{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Pour le calcul d'aire :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma(t)} (x(t)\,\mathrm{d}y(t) - y(t)\,\mathrm{d}x(t))$$

En polaire :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$