1 Fontions de plusieurs variables

Théorème 1 *Soit f une fontion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continûment différentiable, soit (x_0, y_0) un point tel que $f(x_0, y_0)$.*

On suppose que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0 \text{ dans un voisinage de } (x_0, y_0)$$

Alors il existe un voisinage V de (x_0, y_0) de la forme $I \times J$ où I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ et une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall (x,y) \in I \times J, f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \phi(x)$$

Si de plus la fonction f est différentiable, alors la fonction ϕ est dérivable sur I et sa dérivée est donnée par :

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}$$

2 Analyse vectorielle

2.1 Produit scalaire, vectoriel et mixte

$$\overrightarrow{U_1} \cdot \overrightarrow{U_2} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = \|\overrightarrow{U_1}\| \|\overrightarrow{U_2}\| \cos\theta$$

$$\overrightarrow{U_1} \wedge \overrightarrow{U_2} = \begin{pmatrix} b_1 c_2 - c_1 b_2 \\ c_1 a_2 - a_1 c_2 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

$$(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}) = (\overrightarrow{U_1} \wedge \overrightarrow{U_2}) \cdot \overrightarrow{U_3}$$

2.2 Gradient

$$\overrightarrow{grad}\, f(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\vec{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\vec{v}$$

$$\overrightarrow{grad}\,(fg) = f\,\overrightarrow{grad}\, g + g\,\overrightarrow{grad}\, f$$

$$\overrightarrow{grad}\, f(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{v}$$

2.3 Rotationnel

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V}(M) = \overrightarrow{rot}\begin{pmatrix} P(M) \\ Q(M) \\ R(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}(f\,\vec{V}) = f\,\overrightarrow{rot}\,\vec{V} + \overrightarrow{grad}\, f \wedge \vec{V}$$

2.4 Divergence

$$div\,\vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$div(f\,\vec{V}) = f\,div\,\vec{V} + \overrightarrow{grad}\, f \cdot \vec{V}$$

$$div(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) = \vec{V_2} \cdot \vec{rot}\,\vec{V_1} - \vec{V_1} \cdot \vec{rot}\,\vec{V_2}$$

2.5 Laplacien

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = div(\overrightarrow{grad}\, f)$$

$$\vec{\Delta}\vec{V} = \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta R \end{pmatrix}$$

En coordonnées polaires :

$$g(r,\theta) = f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)$$

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

En coordonnées shérique :

$$g(r,\theta,\phi) = f(r\,\cos\phi\,\cos\theta, r\,\cos\phi\,\sin\theta, r\,\sin\phi)$$

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} - \frac{\tan\theta}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi}$$

2.6 Formule

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\, f) = 0 \qquad div(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) = 0$$

$$div(f\,\overrightarrow{grad}\, g - g\,\overrightarrow{grad}\, f) = f\Delta g - g\Delta f$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{V}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{V}) - \vec{\Delta}\vec{V}$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

$$div(f\,\vec{A}) = f\,div\,\vec{A} + \vec{A}\,\overrightarrow{grad}\, f$$

$$div(\overrightarrow{grad}\, f) = \Delta f$$

$$div(f\,\overrightarrow{grad}\, g - g\,\overrightarrow{grad}\, f) = f\Delta g - g\Delta f$$

$$div(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) = 0 \qquad \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{A}\,div\,\vec{B} - \vec{B}\,div\,\vec{A} + \\ &\quad \vec{B} \cdot \overrightarrow{grad}\,\vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{grad}\,\vec{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \wedge \overrightarrow{rot}\,\vec{B} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{rot}\,\vec{A} + \\ &\quad \vec{B} \cdot \overrightarrow{grad}\,\vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{grad}\,\vec{B} \end{aligned}$$

7 Integrale de surface

7.1 Aire d'une surface

7.1.1 Cas générale

Théorème 9 *$\mathcal{S}$ est une surface paramétrée par $\begin{cases} x = a(u,v) \\ y = b(u,v) \\ z = c(u,v) \end{cases}$, $(u,v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2$ où a, b, c sont des fonctions différentiables. On note :*

$$\begin{aligned} \sigma(u,v) &= \|\vec{T}_u(u,v) \wedge \vec{T}_v(u,v)\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial b}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial c}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial b}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial c}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \right\| \end{aligned}$$

alors $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_\Delta \sigma(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

Remarque : $\sigma(u,v)$ est la norme du champ de vecteurs normal à la surface paramétrée.

7.1.2 Équation explicite

$$f(x,y,z) = z - \varphi(x,y) = 0$$

$$z = \varphi(x,y), \qquad p = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,v),$$

$$q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(u,v), \qquad \sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

donc $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_\mathcal{D} \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

ou $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_\mathcal{D} \frac{1}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, avec $\cos\gamma$ la 3$^{\text{e}}$composante de $\vec{n} = \frac{1}{\sigma(x,y)}\begin{pmatrix} -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f}{\|\vec{n}\|}$ D'où les deux champs de normales à la surface :

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{p}{\sigma} \\ -\frac{q}{\sigma} \\ \frac{1}{\sigma} \end{pmatrix} = -\vec{n}_2$$

qui fait un angle aigu avec (Oz).

7.2 Intégrale de surface

$$\iint_\mathcal{S} f\,\mathrm{d}s = \iint_\mathcal{D} f(x,y,\varphi(x,y))\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

μ : Masse Surfacique, $\mathcal{M}$: Moment d'inertie, m : masse

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_\mathcal{S} x\mu\,\mathrm{d}s, \qquad \mathcal{M} = \iint_\mathcal{S} \mu d^2(M,\Delta)\,\mathrm{d}s$$

$$m = \iint_\mathcal{S} \mu\,\mathrm{d}\sigma$$

7.3 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

Cas général :

$$\Phi_\mathcal{S}(\vec{V}) = \iint_\mathcal{S} \vec{V} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

Cas d'une fonction sous forme implicite :

$$\begin{aligned} \Phi_\mathcal{S}(\vec{V}) &= \varepsilon \iint_\mathcal{D} \Big(-p(x,y)\tilde{V}_1(x,y) \\ &\quad -q(x,y)\tilde{V}_2(x,y) + \tilde{V}_3(x,y)\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

avec $\tilde{V}_n(x,y) = V_n(x,y,\varphi(x,y))$.

8 Théorèmes integraux

Théorème 10 (Stokes-Ampère (Stokes 1)) *Soit $\mathcal{S}$ une surface de $\mathbb{R}^3$ orientée par le choix d'un champ de normales $\vec{n}$.*

Le bord de $\mathcal{S}$ est une courbe fermée Γ.

La courbe Γ et la surface $\mathcal{S}$ sont orientée de façon cohérente.

$\vec{V}$ et un champ de vecteurs dont les composantes V_1, V_2, V_3 sont continument différentiables.

$$\Phi_\mathcal{S}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}) = \iint_\mathcal{S} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \oint_\Gamma \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

Théorème 11 (Gauss-Ostrogradski (Stokes 2)) *Soit $\mathcal{V}$ un domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par une surface fermée $\mathcal{S}$ orientée vers l'extérieur de $\mathcal{V}$ et soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs dont la divergence est une fonction continue, alors*

$$\iiint_\mathcal{V} \mathrm{div}\,\vec{V}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_\mathcal{S} \vec{V} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

9 Formules de trigonométrie

$$\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a\,\cos b + \sin b\,\cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a\,\cos b - \sin b\,\cos a$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1, \qquad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2\cos a\,\sin a$$

$$\cos^3 a = \cos a - \cos a\,\sin^2 a$$

$$\sin^3 a = \sin a - \sin a\,\cos^2 a$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

10 Fonction trigonométrique

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)^2 + 1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arccos f(x)) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$$

$$\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x\,\cos^2 x + 2\sin x}{3}$$

$$\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{-\sin^2 x\,\cos x - 2\cos x}{3}$$

11 Trigonométrie hyperbolique

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

$$(\arg\sinh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$(\arg\cosh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\arg\tanh)'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a\,\cosh b + \sinh a\,\sinh b$$

$$\sinh(a+b) = \sinh a\,\cosh b + \cosh a\,\sinh b$$

$$\cosh 2a = \cosh^2 a + \sinh^2 a$$

$$\sinh 2a = 2\sinh a\,\cosh a$$

12 Intégrales diverses

Intégration par partie :

$$\int_a^b u'v = [u\,v]_a^b - \int_a^b uv'$$