1 Analyse vectorielle

1.1 Produit scalaire, vectoriel et mixte

$$\vec{U_1}\cdot\vec{U_2} = a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = \|\vec{U_1}\|\|\vec{U_2}\|\cos\theta$$

$$\vec{U_1}\wedge\vec{U_2} = \begin{pmatrix} b_1c_2-c_1b_2\\ c_1a_2-a_1c_2\\ a_1b_2-b_1a_2\end{pmatrix}$$

$$(\vec{U_1},\vec{U_2},\vec{U_3}) = (\vec{U_1}\wedge\vec{U_2})\cdot\vec{U_3}$$

1.2 Gradient

$$\overrightarrow{grad}\, f(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{grad}\,(fg) = f\,\overrightarrow{grad}\, g + g\,\overrightarrow{grad}\, f$$

$$\overrightarrow{grad}\, f(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{v}$$

1.3 Rotationnel

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V}(M) = \overrightarrow{rot}\begin{pmatrix} P(M)\\ Q(M)\\ R(M)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}(f\,\vec{V}) = f\,\overrightarrow{rot}\,\vec{V} + \overrightarrow{grad}\, f\wedge\vec{V}$$

1.4 Divergence

$$div\,\vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$div(f\,\vec{V}) = f\,div\,\vec{V} + \overrightarrow{grad}\, f\cdot\vec{V}$$

$$div(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}) = \vec{V_2}\cdot\overrightarrow{rot}\,\vec{V_1} - \vec{V_1}\cdot\overrightarrow{rot}\,\vec{V_2}$$

1.5 Laplacien

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = div(\overrightarrow{grad} f)$$

$$\vec{\Delta}\vec{V} = \begin{pmatrix}\Delta P\\ \Delta Q\\ \Delta R\end{pmatrix}$$

En coordonnées polaires ($g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$) :

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$$

En coordonnées shérique :

$$g(r,\theta,\phi) = f(r\cos\phi\cos\theta, r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi)$$

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} - \frac{\tan\theta}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\phi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}$$

1.6 Formule

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad} f) = 0 \qquad div(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) = 0$$

$$div(f\,\overrightarrow{grad}\, g - g\,\overrightarrow{grad}\, f) = f\Delta g - g\Delta f$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{V}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{V}) - \vec{\Delta}\vec{V}$$

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$$div(f\,\vec{A}) = f\,div\,\vec{A} + \vec{A}\,\overrightarrow{grad}\, f$$

$$div(\overrightarrow{grad}\, f) = \Delta f$$

$$div(f\,\overrightarrow{grad}\, g - g\,\overrightarrow{grad}\, f) = f\Delta g - g\Delta f$$

$$div(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) = 0 \qquad \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{A}\,div\,\vec{B} - \vec{B}\,div\,\vec{A} + \vec{B}\cdot\overrightarrow{grad}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{grad}\,\vec{B}$$

$$\overrightarrow{grad}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\wedge\overrightarrow{rot}\,\vec{B} + \vec{B}\wedge\overrightarrow{rot}\,\vec{A} + \vec{B}\cdot\overrightarrow{grad}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{grad}\,\vec{B}$$

1.7 Champ dérivant d'un potentiel scalaire

$\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire si $\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \vec{0}$, c'est-à-dire si $\exists f$ tel que $\overrightarrow{grad}\, f = \vec{V}$

1.8 Champ dérivant d'un potentiel vecteur

$\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur si $div\,\vec{V} = 0$, c'est-à-dire si $\exists\vec{A}$ tel que $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{V}$ ($\vec{A}$ deux fois continument dérivable)

2 Courbes et surfaces

2.1 Coniques

Elipse : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$

Hyperbole : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ asymptote aux droites $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 0$

2.2 Etude de courbes paramétrées

si $x(t)\to\infty$ et $y(t)\to\infty$ alors

- si $\frac{y(t)}{x(t)}\to\infty$ alors branche asymptotique de direction Oy ;
- si $\frac{y(t)}{x(t)}\to 0$ alors branche asymptotique de direction Ox ;
- si $\frac{y(t)}{x(t)}\to a$ alors
  - si $y(t)-a\,x(t)\to\infty$ alors branche asymptotique de direction $y = a\,x+b$;
  - si $y(t)-a\,x(t)\to b$ alors asympote à $y = a\,x+b$[1].

2.3 Courbes polaires

Tangente : $\vec{T_0} = r'(\theta_0)\vec{u_0} + r(\theta_0)\vec{v_0}$

$$\left.\begin{array}{l}\theta\to\theta_0\\ r\to\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ asymptote : } y = x\,\tan\theta_0 + \frac{l}{\cos\theta_0}$$

avec $l = \lim_{\theta\to\theta_0} r(\theta)\sin(\theta-\theta_0)$

Position de la courbe par rapport à l'asymptote : signe de $r(\theta)\sin(\theta-\theta_0) - l$.

3 Intégrale double

3.1 Fubini

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

3.2 Changement de variables

Théorème 1 (Changement de variables) *Soient Δ, D deux ouverts bornés quarrables de $\mathbb{R}^2$, $\Phi:\Delta\to D$ est un changement de variable de Δ sur D. On suppose que la fonction $(u,v)\mapsto J_\Phi(u,v)$ reste bornée sur Δ. Supposons que $f : D\to\mathbb{R}$ une application continue sur $D = \Phi(\Delta)$, alors la fonction $(u,v)\mapsto f\circ\Phi(u,v)$ est integrable sur Δ et on a :*

$$\iint_D f(x,y)dxdy =$$

$$\iint_\Delta f(\alpha(u,v),\beta(u,v))|J_\Phi(u,v)|dudv$$

avec :

$$J_\Phi(u,v) = \frac{\partial\alpha}{\partial u}(u,v)\frac{\partial\beta}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial\alpha}{\partial v}(u,v)\frac{\partial\beta}{\partial u}(u,v) =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial u} & \frac{\partial\alpha}{\partial v}\\ \frac{\partial\beta}{\partial u} & \frac{\partial\beta}{\partial v}\end{vmatrix}$$

[1] attention : étude du signe de $y(t) - a\,x(t) - b$

4 Intégrale triple

4.1 Méthode des bâtonnets (Fubini)

Par le même raisonnement qu'en intégrale double :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iint_A\left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$

4.2 Méthode des tranches

Pour un volume borné en a et en b sur z, on a :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy\right)dz$$

Ce qui revient à dire, en parlant en aire et en volume :

$$\mathcal{V}(D) = \int_a^b \mathcal{A}(D_z)dz$$

4.3 Changement de variables

Théorème 2 (Changement de variables) *Soient Δ, D deux ensembles bornés et cubables de $\mathbb{R}^3$, $\Phi:\Delta\to D$ est un changement de variable de Δ sur D. On suppose que la fonction $(u,v,w)\mapsto J_\Phi(u,v,w)$ reste bornée sur Δ. Supposons que $f : D\to\mathbb{R}$ une application continue sur $D = \Phi(_\Delta)$, alors la fonction $(u,v,w)\mapsto f\circ\Phi(u,v,w)$ est integrable sur Δ et on a :*

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint_\Delta f(\alpha(u,v,w),\beta(u,v,w),\gamma(u,v,w))$$

$$|J_\Phi(u,v,w)|dudvdw$$

avec :

$$J_\Phi(u,v,w) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u},\frac{\partial\Phi}{\partial v},\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial u} & \frac{\partial\alpha}{\partial v} & \frac{\partial\alpha}{\partial w}\\ \frac{\partial\beta}{\partial u} & \frac{\partial\beta}{\partial v} & \frac{\partial\beta}{\partial w}\\ \frac{\partial\gamma}{\partial u} & \frac{\partial\gamma}{\partial v} & \frac{\partial\gamma}{\partial w}\end{vmatrix}$$

Pour le passage aux coordonnées cylindriques :

$$J_\Phi(r,\theta,z) = r$$

Pour le passage aux coordonnées sphériques :

$$J_\Phi(r,\theta,\phi) = r^2\cos\phi$$

5 Intégrale curviligne — Théorème de Green-Riemann

5.1 Abscisse curviligne

5.1.1 Abscisse curviligne — définition

$$s(t) = \varepsilon\int_{t_0}^t\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}u$$

$$\widetilde{M_1M_2} = \left\|\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}u\right\|$$

En polaire :

$$\widetilde{M_1M_2} = \left\|\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\rho^2(u)+\rho'^2(u)}\,\mathrm{d}u\right\|$$

5.1.2 Calcul de masse d'un fil

Théorème 3 (masse d'un fil) *Soit $\mathcal{C}$ une courbe d'extrémité A et B paramétrée par $(x(t),y(t),z(t))$, on suppose que x,y,z sont dérivable. On note $\tilde{u}(t)$ la masse linéique, alors la masse m de $\mathcal{C}$ vaut :*

$$m = \left\|\int_{t_A}^{t_B}\tilde{u}(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t\right\|$$

5.1.3 Vecteur tangent unitaire

Proposition 1 *Soit $\mathcal{C}$ une courbe munie d'une abscisse curviligne s (donc d'une orientation), on note $x^*(s), y^*(t), z^*(t)$ les coordonnées des points de $\mathcal{C}$ en fonction de s, alors $\vec{t^*} = \begin{pmatrix}\frac{dx^*}{dt}\\ \frac{dy^*}{dt}\\ \frac{dz^*}{dt}\end{pmatrix}$ est le vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en $M(s)$, unitaire et dirigé dans le sens de $\mathcal{C}$.*

5.2 Circulation d'un champ de vecteur

5.2.1 Travail d'un champ de force

$$W_{\vec{AB}}(\vec{F}) = \int_{S_A}^{S_B}\Big(P\left(x^*(s),y^*(t),z^*(t)\right)\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}s} + Q\left(x^*(s),y^*(t),z^*(t)\right)\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}s} + R\left(x^*(s),y^*(t),z^*(t)\right)\frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}s}\Big)\,\mathrm{d}s$$

5.2.2 Circulation d'un champ de vecteur

Comme pour le travail d'un champ de force ou :

$$W_{\vec{AB}}(\vec{F}) = \int_{t_A}^{t_b}\left(P\left(x(t),y(t),z(t)\right)x'(t) + Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)y'(t) + R\left(x(t),y(t),z(t)\right)z'(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

5.2.3 Champ de vecteur dérivant d'un potentiel

Théorème 4 *Si le champ de vecteur $\vec{V}$ dérive d'un potentiel f alors la circulation de ce champ de vecteur le long du segment curviligne $\overset{\leadsto}{AB}$ est égale à $f(B) - f(A)$.*

5.3 Théorème de Green-Riemann

Théorème 5 *Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ limitée par une courbe* fermée, sans point double, parcourue dans le sens direct, *notée Gamma. Soient deux fonctions P et Q qui admettent des dérivées partielles premières continues sur D, alors on a :*

$$\oint_\Gamma(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \iint_{\mathcal{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Pour le calcul d'aire :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma(t)}\left(x(t)\,\mathrm{d}y(t) - y(t)\,\mathrm{d}x(t)t\right)$$

En polaire :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

6 Integrale de surface

6.1 Aire d'une surface

6.1.1 Cas générale

Théorème 6 *$\mathcal{S}$ est une surface paramétrée par $\begin{cases} x = a(u,v)\\ y = b(u,v)\\ z = c(u,v)\end{cases}$, $(u,v)\in\Delta\subset\mathbb{R}^2$ où a,b,c sont des fonctions différentiables. On note :*

$$\sigma(u,v) = \|\vec{T}_u(u,v)\wedge\vec{T}_v(u,v)\| = \left\|\begin{pmatrix}\frac{\partial a}{\partial u}(u,v)\\ \frac{\partial b}{\partial u}(u,v)\\ \frac{\partial c}{\partial u}(u,v)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\frac{\partial a}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial b}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial c}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}\right\|$$

alors $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_\Delta\sigma(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

6.1.2 Équation explicite

$$z = \varphi(x,y), \qquad p = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,v), \qquad q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(u,v),$$

$$\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}$$

donc $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{D}}\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

ou $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{D}}\frac{1}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, avec $\cos\gamma$ la 3ecomposante de $\vec{n} = \frac{1}{\sigma(x,y)}\begin{pmatrix}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\\ 1\end{pmatrix}$

6.2 Intégrale de surface

$$\iint_{\mathcal{S}} f\,\mathrm{d}s = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y,\varphi(x,y)\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_{\mathcal{S}} x\mu\,\mathrm{d}s, \qquad M = \iint_{\mathcal{S}}\mu d^2(M,\Delta)\,\mathrm{d}s$$

6.3 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

Cas général :

$$\Phi_{\mathcal{S}}(\vec{V}) = \iint_{\mathcal{S}}\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

Cas d'une fonction sous forme implicite :

$$\Phi_{\mathcal{S}}(\vec{V}) = \varepsilon\iint_{\mathcal{D}}\Big(-p(x,y)\tilde{V}_1(x,y) - q(x,y)\tilde{V}_2(x,y) + \tilde{V}_3(x,y)\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

avec $\tilde{V}_n(x,y) = V_n(x,y,\varphi(x,y))$.

7 Théorèmes integraux

Stokes 0 :

$$f(B) - f(A) = \oint_\gamma\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$$

Théorème 7 (Stokes-Ampère (Stokes 1)) *Soit $\mathcal{S}$ une surface de $\mathbb{R}^3$ orientée par le choix d'un champ de normales $\vec{n}$.*

Le bord de $\mathcal{S}$ est une courbe fermée Γ.

La courbe Γ et la surface $\mathcal{S}$ sont orientée de façon cohérente.

$\vec{V}$ et un champ de vecteurs dont les composantes V_1, V_2, V_3 sont continument différentiables.

Alors le flux du rotationnel de $\vec{V}$ à travers la surface $\mathcal{S}$ est égale à la circulation de $\vec{V}$ le long de la courbe Γ, c'est-à-dire

$$\iint_{\mathcal{S}}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \oint_\Gamma\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

Théorème 8 (Gauss-Ostrogradski (Stokes 2)) *Soit $\mathcal{V}$ un domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par une surface fermée $\mathcal{S}$ orientée vers l'extérieur de $\mathcal{V}$ et soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs dont la divergence est une fonction continue, alors*

$$\iiint_{\mathcal{V}}\mathrm{div}\,\vec{V}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\mathcal{S}}\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

8 Formules de trigonométrie

$$\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\,\cos b + \sin b\,\cos a$$
$$\cos(a-b) = \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a\,\cos b - \sin b\,\cos a$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$
$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2\cos a\,\sin a$$

$$2\sin a\,\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$
$$1+\tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

9 Fonction trigonométrique inverse

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)^2+1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arccos f(x)) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$$